



Contribution à la modélisation des pertes par courants de Foucault dans les circuits magnétiques feuilletés des machines électriques

Wagane Koli Faye

► To cite this version:

Wagane Koli Faye. Contribution à la modélisation des pertes par courants de Foucault dans les circuits magnétiques feuilletés des machines électriques. Energie électrique. Université de Grenoble, 2014. Français. NNT: . tel-01103083

HAL Id: tel-01103083

<https://hal.science/tel-01103083>

Submitted on 14 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Génie Electrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Wagane Koli FAYE

Thèse dirigée par **Gérard Meunier**

préparée au sein du **G2ELAB** Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble

dans l'**École Doctorale EEATS** Ecole doctorale d'Electronique d'Electrotechnique d'Automatique et de Traitement du Signal

Contribution à la modélisation des pertes par courants de Foucault dans les circuits magnétiques feuilletés des machines électriques

Thèse soutenue publiquement le **5 Juin 2014**,
devant le jury composé de :

Madame, Ruth V. SABARIEGO

Professeur ,Katholieke Universiteit Leuven, Rapporteur

Monsieur, Didier TRICHET

Professeur, Université de Nantes , Rapporteur

Monsieur, Noël BURAS

Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1 , Président

Monsieur, Brahim RAMDANE

Maître de Conférence, Université de Grenoble, Co-encadrant

Monsieur, Christophe Guérin

Ingénieur R&D à CEDRAT, Examineur

Monsieur, Gérard MEUNIER

Directeur de Recherche CNRS/ Université de Grenoble, Directeur de thèse



Résumé

Dans le cadre de la lutte contre l'augmentation des gaz à effet de serre et la préservation de l'environnement, l'efficacité énergétique est un enjeu majeur du XXIème siècle. Par exemple, les moteurs et actionneurs électriques sont de plus en plus nombreux dans le monde, les transformateurs de distribution affichent une efficacité énergétique de 97 à 99 %. Cependant, en raison de leur utilisation intensive, leur impact environnemental est loin d'être négligeable. De ce fait une compréhension et une détermination plus précise des pertes dans ces machines électriques permettraient d'améliorer l'efficacité énergétique des dispositifs d'électronique de puissance et des machines électriques. Ces dispositifs sont le siège de pertes dans les bobinages et dans les circuits magnétiques. L'objectif de cette thèse est de pouvoir modéliser, par des méthodes numériques de type éléments finis, les pertes dans les circuits magnétiques feuilletés des machines électriques.

Cependant le laminage de ces circuits magnétiques, qui permet de réduire les courants de Foucault, induit de fortes contraintes de modélisation. En effet la nécessité de disposer d'au moins deux éléments finis dans l'épaisseur de peau pour obtenir une solution de qualité, conduit à la réalisation de maillages de taille très importante, incompatible avec les moyens de calcul disponibles aujourd'hui.

L'objectif de ce travail est de développer des modèles de lois de comportement homogénéisé des matériaux magnétiques feuilletés dans le cadre de l'utilisation de la méthode des éléments finis en 2D et 3D, avec application aux machines tournantes et aux transformateurs. Ces modèles à priori permettront de prendre en compte les pertes en cours de résolution, afin d'obtenir des résultats précis sur les grandeurs locales et globales, et notamment les pertes, en fonction du temps.

Mots clés : Courants de Foucault, Homogénéisation, Éléments Finis, Circuits magnétiques, Pertes fer.

Abstract :

Energy efficiency becomes a global major issue of XXIst century as we are dealing with greenhouse emissions. For instance electric rotating machines and actuators are globally more used than before. Distribution transformers do have 97 to 99% efficiency rate, with a non negligible environmental impact due to their intensive use. A thorough understanding and modeling of losses in those electric devices could help improving and maintaining that level of environmental impact and energy efficiency. This could be productive to many electrical devices from power electronics devices to electric machines and networks, because of the losses in windings and magnetic cores. The main aim of this study is to model eddy current losses in laminated magnetic cores of electric machines by means of numerical methods such as Finite Element Methods (FEM).

Laminating magnetic cores besides reducing eddy current loops, induces new modeling constraints. The necessary assignment of at least two elements in the skin depth in order to have good quality solutions, leads sometimes to unsolvable problems using actual computation solutions.

The purpose will be to develop source code of homogenized behavior laws of laminated magnetic cores using 2D and 3D finite element methods, applied to transformers and electrical motors. Those a priori models consider losses in the main solving process allowing to have accurate results on local and macroscopic entities varying temporally.

Keywords : Eddy currents , Homogenization, Finite Element Method, Lamination stack, Iron losses.

Remerciements :

Je remercie tout naturellement mes proches, pour leur soutien et leurs conseils, je pense à : Yatou, Marcelin, Gaëlle, Denise, François, Jemila, Julie, ID Diatta, Marianne, Bass, Adja, Rougui, Cathy, Boc, Metou, Mbayang, Stella, Thiao, Ibou Diallo, Maryse, Absa, Louis Magloire, Tapha Seck, Gay Tall, Joceline, Fanta, Aïda, Souleymane, Boucounta et ma très chère petite Maria.

A mes frères et sœurs, à ma mère, à mes oncles et tantes, qu'ils trouvent en cet écrit un témoignage de ma reconnaissance et de mon affection

A mon cher père :

"Si les rêves meurent en traversant les ans et les réalités, je garde intacts mes souvenirs, sel de ma mémoire."

Mariama Bâ,

Avant Propos :

Ce travail est le fruit d'une convention CIFRE entre CEDRAT et le G2elab (laboratoire de génie électrique de Grenoble). Il a été dirigé par Gérard Meunier et co encadré par Brahim Ramdane, Patrice Labie du G2elab, Christophe Guérin et Delphine Dupuys de Cedrat.

Je remercie tout d'abord les membres du jury pour leurs recommandations et appréciations:

Monsieur Noël Burais , professeur à l'université Lyon1 d'avoir bien voulu présider le jury de thèse.

Madame Ruth Sabariego, professeur à l'université catholique du Leuvain et monsieur Didier Trichet, Professeur à l'université de Nantes d'avoir accepté puis mis du temps à lire et rapporter ce mémoire.

Je tiens à remercier Gérard Meunier pour son encadrement, Delphine Dupuys et Christophe Guérin pour leur aide et leur conseils.

C'est aussi pour moi l'occasion de témoigner ma profonde gratitude envers le GMF, comprenez Grand Maître Flux, en la personne de Patrice Labie Ingénieur de recherche au laboratoire, pour ses discussions éclairées, sa disponibilité sans faille sa bonne volonté et son expérience.

Aussi dans le même élan, je dis mes remerciements à Brahim Ramdane qui a rejoint l'équipe bien plus tard et dont l'implication dans ce travail m'aura plus d'une fois enlevé des épines du pied. Je pense à ces après midis sans rendez vous pris, passés à investiguer des problèmes de convergence, je pense aussi à nos discussions franches et sincères sur la thèse et sa suite. Enfin, je repense à ses encouragements et ses incitations à toujours voir le bon côté des choses.

Chers messieurs, Merci !!!

De plus, je ne pourrais oublier de remercier mes collègues de Cedrat, Enrico pour ses conseils, David, Nico, Pascal, Leïla, Cyril, Rosica, Anouar, Farid, feu Julien, Diana, toute l'équipe support de Flux . Merci pour votre disponibilité vos discussions riches d'enseignements.

Merci aussi à mes premiers co-bureaux, Feu Patrick Girard et Fabrice Marion, pour m'avoir égayé bien des journées durant, je marmonne encore "Et vlan, passe moi l'éponge, et vlan fais moi gligli".

Merci aussi à Sauveur, et Nadine pour leur dévouement.

A mes collègues du labo et du collège doctoral de Grenoble; je citerai tout en risquant d'en oublier :

Razmik, Mounir, Yasmine, Sélé, Julian, Leonardo, Benoît, Ales, Vinh, Belkacem, Thomas, Mathilde, Gatien, Kaustav, Douglas, Lid.

Je vous dis tous un grand merci.

A tous ceux que j'aurais oublié recevez ma sincère gratitude.

TABLE DES MATIERES

Résumé.....	i
Abstract :.....	ii
Remerciements :.....	iii
Avant Propos :.....	iv
TABLE DES MATIERES	vi
Introduction	3
Cadre général	3
Objectifs.....	3
Organisation de la thèse.....	4
Chapitre 1 : ETAT DE L'ART	6
ETAT DE L'ART	7
Introduction	7
1. Equations de Maxwell	8
2. Formulations	10
2.1. Formulation utilisée en 2D (formulation en potentiel vecteur magnétique)	11
2.2. T-Phi [Dular, 1996]	15
3. Pertes dans une tôle	20
3.1. Différents types de pertes.....	22
3.1.1. Pertes par courants de Foucault :.....	22
3.1.2. Pertes par hystérésis [Univ-Mans] :	23
3.1.3. Pertes par excès :.....	24
3.2. Modèles de pertes.....	24
3.2.4. A posteriori.....	24
3.2.4.1. Modèles semi globaux	25
3.2.4.2. Modèles globaux.....	29
3.2.5. A priori.....	29
4. L'homogénéisation.....	31
4.1. Principe de l'homogénéisation.....	31
4.2. Méthodes d'homogénéisation.....	32

4.2.1. Calcul de pertes dans une tôle magnétique isotrope conductrice [Urma, 2000].....	32
4.2.2. Modification propriété du matériau, exemple de la modélisation 2D harmonique linéaire BF	35
4.2.2.1. Procédé d'homogénéisation en régime harmonique	35
4.2.3. Modification de la loi de comportement, exemple de l'homogénéisation 2D transitoire BF	37
4.2.3.2. Procédé d'homogénéisation 2D transitoire	37
4.2.4. Autres méthodes : Méthode numérique exemple de l'homogénéisation de cellule élémentaire.....	39
4.2.5. Autres méthodes : Méthode numérique exemple de résolution de formulations couplées.	40
4.3. Calcul de pertes déjà présent sous Flux	41
Résumé.....	41
Références :	43
Liste des figures.....	47
Annexes.....	48
Chapitre 2 : Modèles 2D	53
Modèles 2D	54
Introduction	54
1. Modèles transitoires en basse fréquence (BF).....	54
1.1. Modèle de matériau.....	55
1.1.1. Coefficient de foisonnement.....	55
1.1.2. Calcul des perméabilités homogénéisées.....	56
1.1.3. Calcul de $\partial H/\partial B_t$ tenseur de perméabilité incrémentale non linéaire 58	
1.2. Formulations.....	63
1.2.4. Modification de la formulation 2D.....	63
Rappels sur la formulation 2D classique.....	64
1.2.5. Prise en compte de dans la formulation 2D modifiée [Faure, 2012] 66	
2. Validation 2D transitoire.....	68
2.1. Cas d'un matériau Non Linéaire	68
2.1.1. Le modèle 2D homogénéisé dans le logiciel EF.....	68
2.1.2. Evaluation des pertes en transitoire	70

2.1.3.	Résultats de validation	71
2.1.4.	Conclusions.....	74
2.2.	Cas d'un matériau linéaire	74
2.2.5.	Résultats de validation	75
2.2.6.	Conclusions.....	76
3.	Modèles en harmonique hautes fréquences (HF).....	77
3.1.	Modèle analytique.....	78
3.1.1.	Equations générales	78
3.1.2.	Prise en compte du coefficient de foisonnement.....	80
3.2.	Modèle numérique [Meunier, 2010], [El Feddi, 1997].....	81
3.3.	Comparaison des deux modèles.....	83
4.	Validation 2D harmonique	84
4.1.	Evaluation des pertes en harmonique.....	84
4.2.	Résultats de validation.....	84
	Conclusions	85
	Références	87
	Figures	89
	Tableaux	89
	Chapitre 3 : Modèles 3D.....	90
	Modèles 3D	91
	Introduction	92
1.	Modèles transitoires BF.....	92
1.1.	Intro transitoire BF.....	92
1.2.	Formulations.....	93
1.2.1.	Calcul de B au pas courant et de $\partial B/\partial H_t$ pour les matériaux non-linéaires	95
1.2.2.	Calcul de B au pas courant et de $\partial B/\partial H_t$ pour les matériaux linéaires	97
1.2.3.	Implantation dans un code éléments finis.....	98
2.	Validation.....	99
2.1.	Conclusions	102
3.	Modèles harmoniques linéaires.....	103
3.1.	Modèle de bloc homogène.....	105

3.1.1. Pertes par courants de Foucault dans le plan des tôles.....	105
3.1.2. Pertes par courants de Foucault dans la direction orthogonale au plan des tôles.....	106
4. Validation 3D.....	106
4.1. Modèle de bloc homogène uniforme.....	106
4.2. Limites du modèle de bloc homogène.....	109
Analyse:.....	110
4.3. Modèle de tôles homogènes	111
4.4. Conclusions sur le modèle de tôles homogénéisées.....	113
5. Perspectives.....	114
Conclusions	118
Résumé.....	118
Conclusion et perspectives.....	121
Références	119
Figures :	120
Tableaux :	120

Liste de symboles et d'abréviations :

μ :	: perméabilité magnétique absolue
μ_r :	: perméabilité magnétique relative
μ_0 :	: perméabilité magnétique du vide
$\mu_{//}$: perméabilité magnétique parallèle
μ_{\perp}	: perméabilité magnétique perpendiculaire
ν_{\perp}	: réluctivité magnétique perpendiculaire
ν	: réluctivité magnétique absolue ($\nu = 1/\mu$)
ν_0	: réluctivité magnétique du vide ($\nu_0 = 1/\mu_0$)
$\nu_{//}$: réluctivité magnétique parallèle
ν_{\perp}	: réluctivité magnétique perpendiculaire
ρ	: résistivité électrique
σ	: conductivité électrique ($\sigma = 1/\rho$)
d	: épaisseur d'une tôle
δ	: épaisseur de peau
μ^*	: perméabilité magnétique complexe équivalente
σ^*	: conductivité électrique complexe équivalente
ν^*	: réluctivité magnétique complexe équivalente ($\nu^* = 1/\mu^*$)
ρ_v	: densité volumique de charges
E	: champ électrique
H	: champ magnétique
H_s	: champ magnétique statique
B	: induction magnétique
D	: déplacement électrique
I	: courant
J	: densité de courant
A	: potentiel vecteur magnétique ($\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$)
v	: potentiel scalaire électrique ($\mathbf{E} = -\text{grad } v$)
T	: potentiel vecteur électrique ($\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{T}$)
ϕ	: potentiel scalaire magnétique total ($\mathbf{H} = -\text{grad } \phi$)
f	: fréquence
ω	: pulsation ($\omega = 2\pi f$)
l	: ligne
Γ	: frontière
Ω	: domaine volumique
w, w_i	: fonction d'interpolation scalaire
W, W_i	: fonction d'interpolation vectorielle
Id_3	: matrice identité de dimension 3
j	: opérateur complexe défini par $j^2 = -1$

$ A $: norme du vecteur A ou module du nombre complexe A
A^t	: transposée de la matrice A
A^*	: conjugué de A
.	: produit scalaire
\times	: produit vectoriel
\cap	: intersection
\cup	: union
\oplus	: somme directe
\emptyset	: ensemble vide
\mathbf{n}	: vecteur normal
k_t	: composante tangentielle de k
k_n	: composante normale de k
k_{Homo}	: entité k homogénéisée
$\text{Diff}\%$: différence en pourcentage
Nbr_tôles	: nombre de tôles
$\mu_{\text{Réel}}, \mu_{Re}, \mu_{re}$: partie réelle de la perméabilité magnétique complexe
$\mu_{Im}, \mu_{Im}, \mu_{im}$: partie imaginaire de la perméabilité magnétique complexe

:

Introduction

Cadre général

Aujourd'hui, la forte demande énergétique, avec des coûts sans cesse croissants, oblige à se tourner vers des sources beaucoup plus abordables (au sens de la répartition géographique) et renouvelables. En outre, l'optimisation de ces ressources devient une priorité, cela allant d'une meilleure isolation du bâti à une diminution de la consommation des appareils en veille ou à des réseaux électriques intelligents capables de gérer au mieux la consommation en fonction des prix de l'énergie et des pics de charge.

En pratique, de nouvelles politiques d'efficacité énergétique naissent, avec la création de labels et aussi une indexation des prix des appareils sur leur classe énergétique. A une échelle purement industrielle, pour les transformateurs de puissance, du prix de vente est défalqué le coût des pertes en fonctionnement. Le cas des transformateurs de puissance est un cas parmi beaucoup d'autres dispositifs électriques et électromagnétiques, notamment avec le tout électrique qui se généralise dans les transports. D'où une volonté accrue de disposer d'outils de modélisation capables, dès la phase de conception, de quantifier ces pertes et d'optimiser la conception suivant le choix des matériaux et des dimensions. Ceci nécessite une évaluation précise des pertes à tous les niveaux de ces dispositifs électromagnétiques.

Objectifs

Notre étude se situe à une échelle un peu moins connue du public. Elle vise la quantification des pertes dans les circuits magnétiques, dispositif commun à beaucoup d'équipements électromagnétiques.

Les circuits magnétiques sont laminés en plaques isolées les unes des autres pour réduire les pertes par courant de Foucault qui s'y développent. Ce laminage, permet de diminuer significativement ces pertes, permettant ainsi à des transformateurs d'atteindre des rendements de l'ordre de 97% ou plus. Mais si l'on considère le fait que les pertes dans un transformateur de puissance sur toute sa durée de vie sont égales à

son prix d'achat, on voit tout l'intérêt de mieux maîtriser cette évaluation par l'intermédiaire d'outils de calculs numériques.

Cependant, déterminer précisément ces pertes par ces outils de calcul nécessite une discrétisation fine (maillage) de la géométrie et conduit à la résolution de problèmes comportant un grand nombre d'inconnues (c'est notamment le cas lors de l'utilisation des méthodes par éléments finis). La présence d'empilement de tôles isolées les unes des autres pose des problèmes de discrétisation au niveau chaque tôle, mais aussi au niveau de la partie isolante entre ces dernières. Il conduit systématiquement à la résolution de systèmes de très grande taille extrêmement couteuse voire incompatible avec les moyens de calcul disponibles aujourd'hui, et ceci dès le régime de fonctionnement normal en basse fréquence. En outre, la nécessité d'étudier les systèmes à des fréquences plus élevées ou plus généralement de simuler les régimes transitoires, requièrent des maillages encore plus fins (suivant l'épaisseur de la tôle notamment), complexifie d'avantage la simulation de ces dispositifs.

Le but de cette étude, est de disposer d'un outil capable de modéliser les pertes par courants de Foucault dans les tôles magnétiques,

- en s'affranchissant au maximum de la description de leur géométrie et de leur maillage.
- en étant précis et en permettant une évaluation des pertes directement en phase de résolution
- avec des temps de calcul et un encombrement mémoire nécessaires abordables.

Nous nous proposons d'atteindre cet objectif par le développement de techniques d'homogénéisation, permettant de définir des lois de comportement équivalentes électrique et magnétique, ne nécessitant pas de discrétisation suivant l'épaisseur des tôles, et ceci quelle que soit la fréquence d'étude.

Organisation de la thèse

La thèse est organisée suivant trois chapitres : état de l'art, modèles 2D, modèles 3D.

Le premier chapitre est consacré à l'état de l'art de la modélisation des pertes électromagnétiques en général. On y décrit plus précisément l'origine des pertes dans les circuits magnétiques, puis on y rappelle les formulations éléments finis utilisées ainsi que les modèles d'évaluation de pertes existants. Des modèles susceptibles d'être applicables à la modélisation des pertes par courants de Foucault y sont détaillés. Enfin ce chapitre introduit différentes méthodes d'homogénéisation. Ce premier chapitre donne finalement une vue non exhaustive des modèles déjà existants en remarquant

que ceux-ci sont principalement des modèles d'évaluation des pertes a posteriori, réputés moins précis que ceux que les modèles apriori que nous avons mis en œuvre pour cette étude.

Le second chapitre est consacré aux modèles 2D, transitoire et harmonique. Les modèles transitoires nécessitent d'une part une adaptation de l'écriture des formulations et d'autre part l'établissement de lois de comportement homogénéisées. Les phénomènes suivant l'épaisseur étant localement 3D, la validation des modèles 2D doit être effectuée par comparaison avec des cas résolus en 3D. Le cas harmonique porte sur un même principe de modification de loi de comportement mais ne nécessite que peu modification de la formulation proprement dite. Les modèles sont basés sur l'établissement de propriétés physiques complexes en fonction de la fréquence.

Le troisième chapitre est consacré aux modèles 3D. Il se base en partie sur les modèles 2D, auxquels on vient rajouter la prise en compte des pertes dues au champ perpendiculaire au plan des tôles (apparition de boucles de courants induits dans le plan des tôles). Un modèle original d'homogénéisation par tôle y est proposé. Les modèles transitoires s'inspirent de développements permettant la quantification des pertes par excès. Une validation est faite pour les matériaux linéaires, le cas des matériaux non linéaires restant toujours en investigation.

Chapitre 1 : ETAT DE L'ART

"Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera " je ne sais pas le reste".

Évariste Galois

ETAT DE L'ART

Introduction

Contexte

Les matériaux magnétiques représentent un composant de base des dispositifs électromagnétiques (transformateurs, machines électriques,...) dont il faut maîtriser le comportement pour répondre à des contraintes technologiques, économique et de sûreté de fonctionnement.

Un des principaux phénomènes pris en considération lors de la conception des différents dispositifs électromagnétiques est les pertes dans ces matériaux. En effet, pour concevoir un transformateur performant, il faut minimiser ces pertes. Ainsi, leur évaluation reste aujourd'hui un axe de recherche d'actualité.

Les circuits magnétiques sont le siège de pertes diverses. Dans ce manuscrit, on s'intéressera aux pertes par courants de Foucault. Ces pertes sont liées aux courants électriques créés dans le circuit magnétique par la variation au cours du temps du champ magnétique créé par les bobines. C'est la raison pour laquelle les constructeurs conçoivent des circuits magnétiques feuilletés : on cherche à limiter ces courants pour minimiser les pertes par effet Joule. Ce qui permet de limiter l'échauffement et d'améliorer le rendement des dispositifs électromagnétiques.

Lors de la phase de la conception, il est indispensable de quantifier ces pertes à l'aide des outils de modélisation numérique. En effet, grâce à des méthodes telle que la méthode des éléments finis, il est possible d'étudier des systèmes complexes avant de les fabriquer. Ces méthodes reposent sur une discrétisation du domaine d'étude [Sabonnadière & Coulomb, 1986].

Cependant, lors de la modélisation des circuits magnétiques feuilletés, une difficulté apparaît, liée à la façon dont l'espace est discrétisée (le maillage du domaine d'étude). Du fait de la faible épaisseur des tôles, un bon maillage implique une augmentation importante du nombre d'inconnues, ce qui se traduit par une augmentation du temps de calcul.

Par exemple, en se fixant pour règle d'avoir une discrétisation à 2 ou à 3 éléments sur une épaisseur de peau, une tôle conductrice en basse fréquence (BF)(où l'épaisseur de peau est considérée relativement égale à l'épaisseur de la tôle), demandera au moins 2 à 3 éléments dans l'épaisseur. En montant en fréquence (ex : épaisseur de peau de l'ordre

du dixième de l'épaisseur de la tôle), le problème de maillage devient de plus en plus contraignant.

Pour pallier ce problème, des techniques d'homogénéisation sont généralement utilisées. Elles consistent à remplacer le circuit magnétique feuilleté par un bloc homogène comportant des propriétés électromagnétiques équivalentes. Cela évite de définir chaque tôle séparément et simplifie l'opération du maillage du dispositif étudié.

Dans ce chapitre, nous présenterons l'ensemble des formulations électromagnétiques utilisées. Ces formulations seront modifiées pour la prise en compte des pertes. Ensuite, un bref exposé des pertes dans les tôles et les différents modèles permettant de les calculer sera fait.

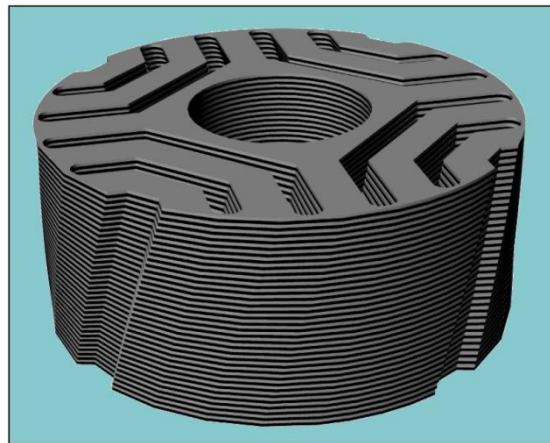


Figure 1 Exemple de paquet de tôles (noyau de rotor d'une machine synchrone)

1. Equations de Maxwell

La figure 2 représente un système électromagnétique typique. Il est composé d'air de matériaux ferromagnétiques et/ou conducteurs et de source de champ magnétique. L'ensemble du système forme le domaine d'étude Ω de frontière Γ .

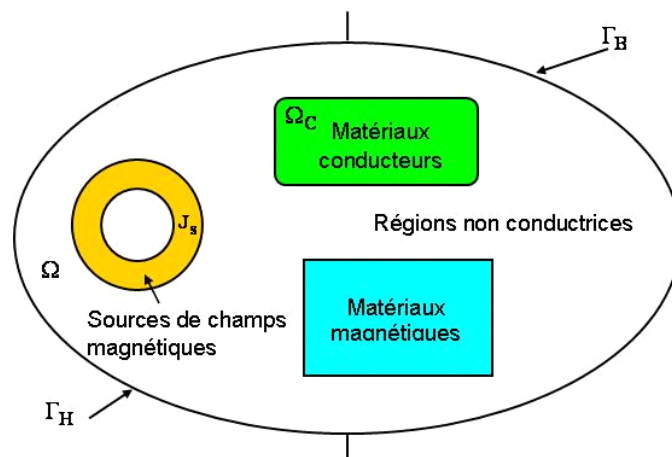


Figure 2 Domaine d'étude

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques est régi par les équations de Maxwell. Celles-ci constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui lient les phénomènes magnétiques aux phénomènes électriques. Ces équations sont les suivantes (avec l'hypothèse basse fréquence : Fréquence où les longueurs d'ondes concernées sont très grandes par rapport aux dimensions des dispositifs). [Dular, 1996] :

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho_v \quad (3)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

\mathbf{H} : champ magnétique (A/m),

\mathbf{B} : induction magnétique (Tesla)

\mathbf{E} : champ électrique (V/m)

\mathbf{D} : déplacement électrique (C/m²)

\mathbf{J} : densité de courant de conduction (A/m²)

ρ_v : densité volumique de charge électrique (C/m³)

Le comportement électrique et magnétique des différents milieux du domaine d'étude est pris en compte par les lois de comportement. Celles-ci lient les différents champs magnétiques et électriques entre eux. Elles sont données sous les formes suivantes :

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H}).\mathbf{H} \quad (5)$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (6)$$

μ et σ représentent respectivement la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du matériau étudié.

Conditions aux interfaces et conditions aux limites

Les champs électromagnétiques subissent des discontinuités lors du passage entre deux milieux de propriétés différentes. Les conditions de passage s'écrivent alors à l'interface entre deux grandeurs électromagnétiques [Ramdane, 2009] :

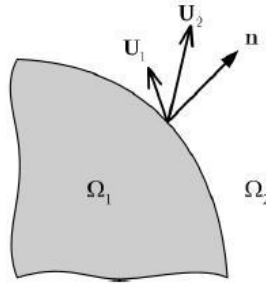


Figure 3 Interface entre deux milieux Ω_1 et Ω_2

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \quad (7)$$

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8)$$

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0 \quad (9)$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \quad (10)$$

ρ_s et \mathbf{J}_s représentent respectivement la densité surfacique de charge et de courant, \mathbf{n} est vecteur unitaire normal dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

La résolution du système composé des équations de Maxwell et des lois de comportement admet une infinité de solutions. Par conséquent, pour assurer l'unicité de la solution, des conditions aux limites du domaine sont imposées.

La frontière Γ du domaine d'étude est décomposée en deux parties complémentaires notées Γ_H et Γ_B telles que $\Gamma_H \cup \Gamma_B = \Omega$ et $\Gamma_H \cap \Gamma_B = \emptyset$ (figure 2). Sur la frontière Γ_H , on impose des conditions aux limites de la forme :

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad (11)$$

D'après la relation (2), on obtient :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (12)$$

Sur la frontière Γ_B , on impose des conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (13)$$

D'après (1), on a :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad (14)$$

2. Formulations

Pour résoudre le système d'équations issu des équations de maxwell, nous utilisons généralement des formulations en potentiels [Dular, 1996]. Dans la littérature, il existe plusieurs types de formulations. Dans ce manuscrit, nous ne présenterons que les deux formulations utilisées pour l'étude des problèmes de courants de Foucault. Il s'agit de:

- ✓ La formulation en potentiel vecteur magnétique (**A**) dans le cas de la modélisation en 2D.
- ✓ La formulation en potentiel vecteur électrique et en potentiel scalaire magnétique (**T-Phi**) dans le cas d'étude en 3D.

Ces choix de formulations sont imposés. L'utilisation de la formulation **T-Phi** en 3D se justifie par le fait que la formulation en potentiel vecteur n'est pas disponible dans la version commerciale de Flux. De plus, la formulation en potentiel vecteur ne se prête pas aussi facilement à l'imposition de notre future contrainte sur les courants surfaciques.

Par la suite le choix des fonctions de formes nodales découlera aussi du fait, de l'utilisation de formulations modifiée en \mathbf{T}_z .

2.1. Formulation utilisée en 2D (formulation en potentiel vecteur magnétique)

Dans un premier temps, on présentera la formulation en 3D. La formulation 2D en découlera.

Comme l'induction magnétique est à divergence nulle, un potentiel vecteur magnétique peut être défini comme :

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (15)$$

En utilisant l'équation (1), le champ électrique **E** peut être exprimé en fonction du potentiel vecteur magnétique **A** défini à un gradient près. On obtient alors :

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}v \quad (16)$$

Où v est le potentiel scalaire électrique. En portant (15) et (5) dans (2) on trouve la formulation magnétodynamique en potentiel vecteur appelée formulation **A-v**

$$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}v \right) = 0 \quad (17)$$

Afin d'obtenir un nombre cohérent d'équations, l'équation de la conservation de la densité de courant ($\text{div } \mathbf{J} = 0$) est introduite dans le sous-domaine conducteur :

$$\text{div} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}v \right) \right) = 0 \quad (18)$$

Une fois réécrites ces équations sont ensuite exprimées sous leur forme faible (basée sur la méthode variationnelle) [Sabonnadière & Coulomb, 1986].

A- Formulation faible

Pour cette étude nous considérons les matériaux non linéaires et isotropes. Ce qui amène à définir une loi où la perméabilité est fonction de l'induction. Une formulation faible du problème (17) et (18) est définie en appliquant la méthode des résidus pondérés. La forme variationnelle de l'équation de Maxwell-Ampère est donnée par :

$$\int_{\Omega} [\mathbf{A}' \cdot \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{J}] d\Omega = 0 \quad (19)$$

où \mathbf{A}' est la fonction test. En choisissant les fonctions test \mathbf{A}' égales aux fonctions de forme \mathbf{W} , on obtient :

$$\int_{\Omega} [\mathbf{W} \cdot \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}] d\Omega = 0 \quad (20)$$

En utilisant les propriétés d'analyse vectorielle, on a :

$$\int_{\Omega} [\mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{W} + \text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{W}) - \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}] d\Omega = 0 \quad (21)$$

Le second terme de l'équation (21) est développé en utilisant la formule de Green-Ostrogradsky. Donc, pour le domaine Ω de frontière Γ ayant pour normale \mathbf{n} on a :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{W}) = \int_{\Gamma} (\mathbf{H} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

or $\Gamma = \Gamma_H \oplus \Gamma_B$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{H} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= \int_{\Gamma_B} (\mathbf{H} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_H} (\mathbf{H} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_H} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{W} d\Gamma + \int_{\Gamma_B} (\mathbf{W} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H} d\Gamma \end{aligned}$$

Sachant que sur $\Gamma_H : \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$; de même sur $\Gamma_B : \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$.

On applique la condition sur Γ_B en imposant $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ avec \mathbf{A} de même forme que \mathbf{W} et donc $\mathbf{W} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur Γ_B [Dular, 1996]. D'où le système à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} [\mathbf{W} \cdot \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}] d\Omega = 0 \\ \mathbf{B} = \mu(\mathbf{B}) \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \text{grad} V \end{array} \right.$$

Cette formulation faible est établie pour un problème 3D. Le problème 2D qui nous intéresse découlera de ce cas général 3D. Dans le paragraphe suivant, nous détaillerons la formulation en 2D en vue d'une modification pour la prise en compte des pertes, [Faure, 2012].

La modélisation bidimensionnelle est généralement possible si les phénomènes physiques sont invariants suivant un axe (OZ par exemple) - Notons qu'il est aussi possible d'avoir une géométrie 2D pour des dispositifs comprenant des courants dans le plan d'étude, auquel cas la formulation utilisée serait la même qu'en 3D - Nous faisons les hypothèses suivantes :

- \mathbf{B} et \mathbf{H} doivent être dans le plan d'étude
- \mathbf{J} doit être perpendiculaire au plan d'étude

Soit le problème 2D de la figure 4. On remarquera que ce système est une coupe verticale du système 3D étudié précédemment.

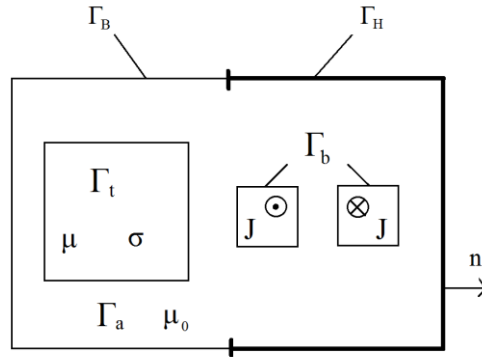


Figure 4 Système 2D

Dans ce cas-ci le système est 2D plan et la profondeur du domaine sera prise en compte par L . D'où le système suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} L \times \int_{\Gamma} [\mathbf{W} \cdot \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}] d\Gamma = 0 \\ \mathbf{B} = \mu(\mathbf{B}) \mathbf{H} \\ \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \text{grad} V \end{array} \right. \quad (22)$$

Nous passons dans l'espace discrétisé des éléments finis. Notons W_i la fonction de forme vectorielle définie au nœud i tel que : $W_i = \mathbf{Id}_3 w_i$; le résidu devient :

$$L \times \int_{\Gamma} [\mathbf{W}_i \cdot \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{J}] d\Gamma = 0 \quad (23)$$

Dans un problème électromagnétique résolu en formulation 2D, les champs \mathbf{H} et \mathbf{B} sont dans le plan d'étude tandis que \mathbf{E} et \mathbf{J} lui sont normaux. Nous en déduisons que le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} ne comporte qu'une seule composante non nulle. C'est sa composante normale au plan. On a donc :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_n \quad (24)$$

Pour un nombre N d'éléments finis, on discrétise

$$\mathbf{A}_n = \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i \mathbf{A}_{n_i} \quad (25)$$

En outre, \mathbf{A} normal permet de définir une opération Rot_{2D} [Coulomb, 1981] telle que :

$$\text{rot}_{2D}(w_i) = -\mathbf{n} \times \mathbf{grad}(w_i) \quad (26)$$

\mathbf{n} vecteur normal unitaire. On remarquera que :

$$\mathbf{rot}(w_i) = \text{rot}_{2D}(w_i) = -\mathbf{n} \times \mathbf{grad}(w_i) \quad (27)$$

De même on définit :

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n A_{n_i} \text{rot}_{2D}(w_i) \quad (28)$$

d'où :

$$\mathbf{H} = [\mathbf{v}(\mathbf{B})]\mathbf{B} = [\mathbf{v}(\mathbf{B})] \sum_{i=1}^n A_{n_i} \text{rot}_{2D}(w_i) \quad (29)$$

où \mathbf{v} est la réductivité du matériau.

Le système d'équations (22) devient :

$$R_i = L \int_{\Gamma_{\Omega}} [\text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \mathbf{H} - w_i \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}] d\Gamma_{\Omega} = 0 \quad (30)$$

On notera que le résidu (30) est scalaire, nous sommes donc passés d'un résidu vectoriel à un résidu scalaire, résidu qu'il faudra calculer par la méthode de Newton-Raphson dans le cas d'un matériau non linéaire (la loi de comportement $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ est non linéaire).

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative qui permet de trouver les racines d'une équation par des approximations successives de la solution. Cette méthode très souvent utilisée dans la résolution des systèmes non linéaires en modélisation électromagnétique est à convergence quadratique; elle est basée sur un développement de limité en série de Taylor au premier ordre.

Le développement en série de Taylor au premier ordre de notre résidu donne :

$$R(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}) + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{A}}(\Delta\mathbf{A}) + \theta(\Delta\mathbf{A}^2) \quad (31)$$

Les développements des termes de l'équation (31) sont mis en annexe [voir **Newton-Raphson**]. Ayant déterminé tous les termes de l'équation (31), nous pouvons écrire le système 2D sous une forme plus générale, et notamment telle qu'elle est résolue sous le logiciel de modélisation EF. Nous l'écrivons :

$$[\mathbf{M}][\Delta\mathbf{A}] = [\mathbf{Q}] \quad (32)$$

avec

$$M_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial A_j} = L \int_{\Gamma_\Omega} \text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}^t} \text{rot}_{2D}(w_j) d\Gamma_\Omega \quad (33)$$

et

$$Q_i = - R_i = - L \int_{\Gamma_\Omega} [\text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \mathbf{H} - w_i \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}] d\Gamma_\Omega = 0 \quad (34)$$

A ce stade, nous disposons donc de la formulation 2D, sans prise en compte des pertes. Le terme \mathbf{J} est celui du courant imposé dans la bobine inductrice. La prise en compte des pertes nécessitera la modification des lois de comportements que nous verrons plus en détails dans le chapitre 2.

Toujours dans l'optique de présenter les formulation utilisées, nous passons à la formulation utilisée pour toutes les résolutions 3D.

2.2. T-Phi [Dular, 1996]

Dans cette formulation, c'est le champ magnétique \mathbf{H} qui peut être exprimé en fonction des potentiels. Comme la densité de courant est à divergence nulle, un potentiel vecteur électrique, noté \mathbf{T} , est introduit tel que :

$$\text{rot} \mathbf{T} = \mathbf{J} \quad (35)$$

où \mathbf{T} est définie dans le domaine conducteur. Pour un domaine simplement connexe, en regroupant l'équation de Maxwell-Faraday et (35), le champ magnétique \mathbf{H} peut être exprimé par la relation :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \text{grad} \Phi \quad (36)$$

où ϕ est le potentiel scalaire magnétique, défini dans un domaine d'étude connexe.

Dans une région non conductrice :

$$\mathbf{H} = -\text{grad}\Phi \quad (37)$$

On définit \mathbf{T} comme étant somme d'un terme de source et d'un terme de réaction, soit donc :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_r \quad (38)$$

Avec

$$\text{rot}\mathbf{T}_s = \mathbf{J}_s \quad (39)$$

Dans une région conductrice on obtient l'équation en portant dans (1), (35) et (36) :

$$\text{rot}(\sigma^{-1}\text{rot}\mathbf{T}) + \frac{\partial}{\partial t}\mu(\mathbf{T} - \text{grad}\Phi) = 0 \quad (40)$$

Dans une région non conductrice on obtient :

$$\text{div}(\mu(-\text{grad}\Phi)) = 0 \quad (41)$$

A- Formulation faible [Golovanov, 1997]

Selon le principe de la formulation faible dont les références sont données en **2.1.**, nous présentons ici la formulation faible \mathbf{T} - ϕ pour le cas d'étude classique de la figure 5. Ce cas représente une ellipse, portion d'un domaine composé de deux volumes distincts à intersection vide. Le premier volume non conducteur V_1 et le second conducteur V_2 sont séparés par une frontière Γ_{12} ici en vert. La résolution se fait toujours suivant les hypothèses BF.

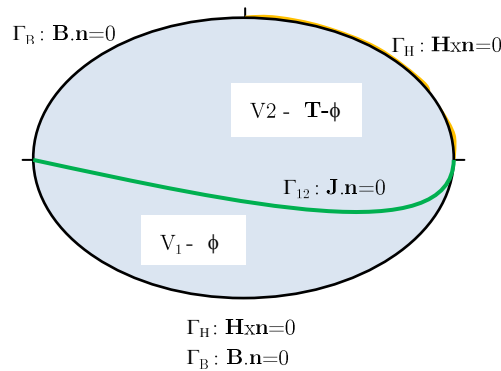


Figure 5 Problème type sans source de courant

Aussi dans le volume V_2 conducteur se développent des courants de Foucault. Le volume V_1 lui est non conducteur et ne comprend ni courants de Foucault ni courant source \mathbf{J}_s .

Les équations à résoudre dans les domaines V_1 et V_2 sont : (40) dans V_2 et (40) et (41) dans V_1

Une condition de jauge doit être définie pour assurer l'unicité de la solution. La condition de jauge $\text{div}\mathbf{T} = 0$ est donc imposée sous forme de pénalité [BIRO, 1989].

Le terme de pénalité $-\text{grad}(\sigma^{-1}\text{div}\mathbf{T})$ est introduit dans l'équation (41). De même l'absence de divergence de \mathbf{B} n'est plus implicite et doit être exprimée d'où le nouveau système :

$$\text{rot}(\sigma^{-1}\text{rot}\mathbf{T}) - \text{grad}(\sigma^{-1}\text{div}\mathbf{T}) + \frac{\partial}{\partial t}\mu(\mathbf{T} - \text{grad}\Phi) = 0 \quad (42)$$

$$\text{div}(\mu(\mathbf{T} - \text{grad}\Phi)) = 0 \quad (43)$$

sur V_1 et

$$\text{div}(\mu(-\text{grad}\Phi)) = 0 \quad (44)$$

sur V_2 .

L'application de la jauge sur tout le domaine est vérifiée en annexe, [voir **Jauges**].

- **Condition de continuité aux interfaces**

Pour coupler les deux volumes nous traduisons les conditions de continuité par la conservation de la composante normale de l'induction. La condition

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

devient :

$$\mu_1(\mathbf{T} - \text{grad}\phi_1) \cdot \mathbf{n}_1 + \mu_2(-\text{grad}\phi_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (45)$$

Et $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 + \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$, cf. (11)

$$\mu_1(\mathbf{T} - \text{grad}\phi_1) \times \mathbf{n}_1 + \mu_2(\mathbf{T} - \text{grad}\phi_2) \times \mathbf{n}_2 = 0 \quad (46)$$

De plus, s'il existe des conductivités différentes à la frontière Γ_{12} , la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{E} devra aussi être assurée. Cette fois-ci par :

$$\sigma_1^{-1}\text{rot}\mathbf{T}_1 \times \mathbf{n}_1 + \sigma_2^{-1}\text{rot}\mathbf{T}_2 \times \mathbf{n}_2 = 0 \quad (47)$$

Nous pouvons donc réécrire les équations sous leur forme variationnelle avec la condition de jauge intégrée. En appliquant la méthode de Galerkin comme pour la formulation \mathbf{A} -v nous pouvons tout résumer au système ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{V_1} \mathbf{W} \left[\mathbf{rot}(\sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T}) - \mathbf{grad}(\sigma^{-1} \mathbf{div} \mathbf{T}) - \frac{\partial}{\partial t} (\mu_1 (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \phi)) \right] dv = 0 \\ \int_{V_1} \mathbf{W} [\mathbf{div}(\mu_1 (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \phi))] dv = 0 \\ \int_{V_2} \mathbf{W} [\mathbf{div}(\mu_2 (-\mathbf{grad} \phi))] dv = 0 \\ \mathbf{B} = \mu(\mathbf{B}) \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{H} = \mathbf{T} - \mathbf{grad} \phi \\ \mathbf{rot} \mathbf{T} = \mathbf{J} \end{array} \right.$$

Pour les mêmes soucis de réduction d'ordre déjà évoquée en **A-v** nous utilisons des expressions d'analyse vectorielle. Ces développements permettent en outre de prendre en compte les conditions aux limites déjà décrites. Nous passerons directement à la formulation finale, le détail d'application des conditions aux limites étant en annexe [voir **Conditions aux limites**].

Toutes les conditions aux limites étant vérifiées, la continuité de la composante tangentielle de l'induction est vérifiée faiblement et nous obtenons un nouveau système à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{V_1} \left[\mathbf{rot} \mathbf{W} \cdot \mathbf{rot}(\sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T}) + \mathbf{div} \mathbf{W} \cdot \sigma^{-1} \mathbf{div} \mathbf{T} + \mathbf{W} \cdot \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \phi) \right] dv = 0 \\ - \int_{V_1} (\mathbf{grad} w_i \cdot \mu_1 (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \phi) \cdot \mathbf{n}_1) dv = 0 \\ \int_{V_2} (\mathbf{grad} w_i \cdot \mu_2 (-\mathbf{grad} \phi) \cdot \mathbf{n}_2) dv = 0 \\ \mathbf{B} = \mu(\mathbf{B}) \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{H} = \mathbf{T} - \mathbf{grad} \phi \\ \mathbf{rot} \mathbf{T} = \mathbf{J} \end{array} \right.$$

Le domaine est ensuite discrétisé et les potentiels sont interpolés sur les nœuds du domaine. Le potentiel vecteur électrique est ainsi discrétisé en prenant des fonctions d'interpolation égales aux fonctions de forme :

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_i \mathbf{T}_i$$

De même

$$\Phi = \sum_{i=1}^n w_i \phi_i$$

avec rappelons le

n : nombre de nœud du domaine et \mathbf{W}_i la fonction de forme vectorielle définie au nœud i tel que : $\mathbf{W}_i = w_i \times \mathbf{Id}_3$

Les équations du système une fois discrétisées peuvent s'écrire :

$$\int_{V_1} \left[\mathbf{rot} \mathbf{W}_i \cdot \sigma^{-1} \sum_{j=1}^{n_1} (\mathbf{rot} \mathbf{W}_j) \cdot \mathbf{T}_j + \mathbf{div} \mathbf{W}_i \cdot \sigma^{-1} \sum_{j=1}^{n_1} (\mathbf{div} \mathbf{W}_j) \cdot \mathbf{T}_j + \mathbf{W}_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_1 \sum_{j=1}^{n_1} \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{T}_j \right) - \mathbf{W}_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_1 \sum_{j=1}^{n_1} (\mathbf{grad} w_j) \cdot \boldsymbol{\phi}_i \right) \right] dv = 0 \quad (48)$$

$$\int_{V_1} \left[(-\mathbf{grad} w_i) \cdot \mu_1 \left(\sum_{j=1}^{n_1} \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{T}_j \right) \right] dv + \int_{V_1} \left[\mathbf{grad} w_i \cdot \mu_1 \left(\sum_{j=1}^{n_1} (\mathbf{grad} w_j) \cdot \boldsymbol{\phi}_j \right) \right] dv = 0 \quad (49)$$

Sur le domaine V_1 , avec n_1 le nombre de nœuds sur ce domaine.

$$\int_{V_2} \left[\mathbf{grad} w_i \cdot \mu_2 \left(\sum_{j=1}^{n_2} (\mathbf{grad} w_j) \cdot \boldsymbol{\phi}_j \right) \right] dv = 0 \quad (50)$$

sur le domaine V_2 avec n_2 le nombre de nœuds sur ce second domaine.

En supposant que la résolution se fait en régime harmonique le terme $\frac{\partial}{\partial t}$ peut être remplacé par la pulsation complexe jw . Amenant ainsi à résoudre le système linéaire final suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_1} R_{ij} \mathbf{T}_j + \sum_{j=1}^{n_1} S_{ij} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1} P_{ij} \mathbf{T}_j + \sum_{j=1}^{n_1} U_{ij} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \end{cases}$$

Dans le domaine V_1 , et

$$\sum_{j=1}^{n_1} V_{ij} \boldsymbol{\phi}_j = 0$$

Dans le domaine V_2 avec

$$R_{ij} = \int_{V_1} [\mathbf{rot} \mathbf{W}_i \cdot \sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{W}_j + \mathbf{div} \mathbf{W}_i \cdot \sigma^{-1} \mathbf{div} \mathbf{W}_j + \mathbf{W}_i \cdot jw \mu_1 \mathbf{W}_j] dv$$

$$S_{ij} = \int_{V_2} -\mathbf{W}_i jw \mu_2 (\mathbf{grad} w_j) dv$$

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= \int_{V_1} -\mathbf{grad} \mathbf{W}_i \cdot \mu_2 \mathbf{W}_j \, dv \\
U_{ij} &= \int_{V_1} \mathbf{grad} w_i \cdot \mu_1 \mathbf{grad} w_j \, dv \\
V_{ij} &= \int_{V_2} \mathbf{grad} w_i \cdot \mu_2 \mathbf{grad} w_j \, dv
\end{aligned}$$

Cette formulation déjà implémentée dans Flux sera l'unique formulation utilisée pour les calculs 3D harmoniques.

Après avoir vu les formulations utilisées pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques. Nous allons décrire dans la section suivante les types de pertes, en notant quelques aspects propres à la modélisation de ces différents types de pertes.

3. Pertes dans une tôle

Les tôles utilisées dans les dispositifs électromagnétiques sont constituées de matériaux ferromagnétiques, et acquièrent donc une forte aimantation même soumis à un champ faible.

Pour mieux comprendre les phénomènes dus aux courants induits dans les matériaux magnétiques conducteurs, un petit détour à l'échelle microscopique du matériau s'impose.

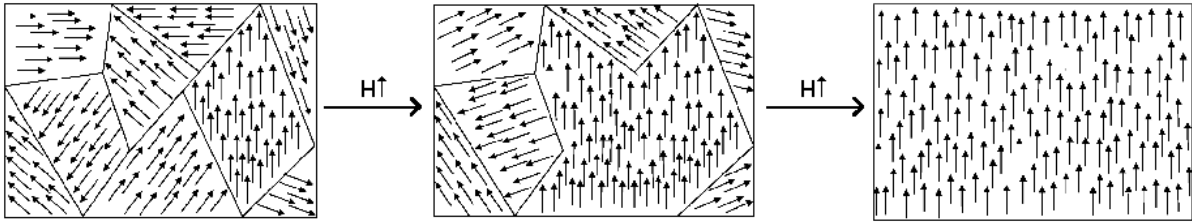


Figure 6 Disposition en domaines du matériau magnétique

On voit sur la figure 6 la configuration du matériau magnétique en domaines. Les domaines de Weiss. L'équilibre des différentes énergies magnétiques à l'intérieur du matériau (Energie d'échange, Energie d'anisotropie magnéto-cristalline, Energie magnétostatique et Energie magnétostrictive) entraîne une configuration du matériau en domaines magnétiques. Chaque domaine est aimanté dans une direction de faible aimantation et deux domaines contigus sont séparés par une paroi de transition d'aimantation (de la direction de facile aimantation de l'un des domaines vers l'autre). Cette paroi est appelée paroi de Bloch et retiendra notre attention pour la suite comme origine d'un type de pertes. [Brissonneau, 1997], [Lebouc, 2006], [Sedkaoui, 2012].

En l'absence de champ magnétique extérieur, ces domaines sont organisés suivant une configuration d'énergie minimale du matériau et l'aimantation résultante est souvent nulle.

Un champ magnétique d'intensité croissante change la configuration des domaines, faisant accroître le volume des domaines dont l'aimantation est dans le même sens que le champ extérieur, entraînant ainsi un mouvement de parois magnétiques.

L'image de droite de la figure 6 correspond à la saturation, tous les moments magnétiques sont en direction du champ imposé.

Cependant, suivant la nature du matériau; existence de défauts dus à la présence d'impuretés non magnétiques (carbures nitrures, etc.) et magnétiques (cémentite) et aussi aux contraintes mécaniques subies, les parois sont piégées dans ces défauts et ne peuvent continuer leurs déplacements qu'au moment où l'énergie appliquée est supérieure à une valeur seuil. Le déplacement de la paroi présente donc un saut, plus communément appelé saut de Barkhausen, [Lebouc, 2006].

En résumé, la course de la paroi est réversible quand le champ imposé augmente, statique quand la paroi est piégée par un défaut, et irréversible après le saut d'énergie. Ce déplacement est irréversible dans la mesure où l'interruption du processus d'aimantation n'implique pas un retour des domaines à leur état initial (du fait de l'énergie stockée). Ce phénomène est à l'origine de **l'hystérésis**.

On dit alors que le matériau présente une aimantation rémanente et seule, l'application d'un champ coercitif opposé au champ initial d'aimantation le fera retourner à son état d'origine.

On notera que le déplacement des parois entraîne des courants induits à l'échelle microscopique qui s'opposent à ces déplacements.

Ces phénomènes sont à l'origine de pertes dites **par excès** cf. **3.3**. Ces pertes sont évaluées par des modèles à propriétés volumiques [Meunier, 2008], [Brissonneau, 1997]. Cependant, les fortes variations en surface des matériaux peuvent conduire à la définition de propriétés surfaciques en plus des propriétés volumiques [Maloberti, 2006], [Mazauric, 2005].

Des pertes de nature similaire existent au niveau macroscopique. Elles sont classiquement appelées pertes **par courants de Foucault**. Ces derniers sont bien caractérisés par la loi de Lenz. Ce sont de boucles de courants qui s'opposent à la variation du champ magnétique en créant à leur tour un champ de réaction qui s'oppose aux champ imposé qui leur a donné naissance.

Les pertes dans les circuits magnétiques sont tout de même divisées en trois types :

3.1. Différents types de pertes

3.1.1. Pertes par courants de Foucault :

Ce sont des boucles de courant créées par la variation du champ magnétique sur un bloc magnétique conducteur. Ils sont connus sous le nom de courants induits (macroscopiques).

La puissance électromagnétique est donnée par :

✓ le vecteur de Poynting

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (51)$$

$$P = \int_{\Gamma} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{\Gamma} \quad (52)$$

✓ Par le théorème de la divergence

$$P = \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{\Pi} \cdot d\Omega \quad (53)$$

$$P = \int_{\Omega} [\mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H}] d\Omega \quad (54)$$

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\Omega \quad (55)$$

Le premier terme de (55) est un terme de puissance dissipée, assimilable à une loi d'Ohm et qui permet de quantifier les pertes par courants de Foucault. Le second définit l'énergie échangée.

A ce terme

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega \quad (56)$$

nous porterons une attention particulière, puisqu'il devra être intégré et évalué par les modèles de pertes par courants de Foucault.

3.1.2. Pertes par hystérésis [Univ-Mans] :

Un autre type vient s'ajouter au panel des pertes rencontrées dans les matériaux magnétiques. Les pertes par hystérésis résultent du stockage par le matériau magnétique d'une énergie irréversible d'aimantation. Ainsi le matériau garde une trace de sa précédente aimantation, d'où le nom matériaux à mémoire, largement utilisé dans l'industrie pour le stockage de données. Du point de vue microscopique ces pertes sont liées au phénomène de déplacement de parois magnétiques notamment par les phénomènes d'ancrage/décrochage de celles-ci [Brissonneau, 1997], [Lebouc, 2006].

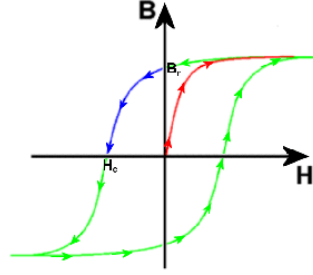


Figure 7 Cycle d'hystérésis

Le niveau d'induction dans les matériaux magnétiques à l'instant t dépend du niveau d'induction à l'instant précédent : on dit que ces matériaux sont hystérétiques. Les pertes par hystérésis sont des pertes irréversibles dues à l'aimantation du matériau. Caractérisons-les : le second terme de l'expression du vecteur de Poynting (55) représente la puissance magnétique. Sur un cycle d'hystérésis l'énergie fournie au circuit magnétique par l'inducteur est :

$$W = \oint \mathbf{H} d\mathbf{B} \quad (57)$$

Si l'on se place toujours du côté inducteur (bobine de N spires) avec $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot d(\mu_0 \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot d(\mu_0 \mathbf{M})$$

Le premier terme représente l'énergie d'établissement du champ dans le vide et disparaît par parité pour un cycle symétrique. Le second terme représente l'énergie d'aimantation du milieu.

$$W = \oint \mathbf{H} \cdot d(\mu_0 \mathbf{M}) \quad (58)$$

Selon le premier principe de la thermodynamique, la variation de l'énergie interne d'un système sur un cycle doit être nulle, donc en prenant Q chaleur échangée avec le milieu extérieur.

$$W + Q = 0 \quad \text{et donc} \quad (59)$$

$$W = -Q = - \oint \mathbf{H} \cdot d(\mu_0 \mathbf{M})$$

D'où un échauffement du circuit magnétique.

On notera que l'hystérésis dépend de la nature du matériau, des processus d'aimantation et de la forme de l'échantillon et aussi de la fréquence dans le cadre dynamique.

Nous noterons aussi qu'en présence d'un matériau parfait (sans défauts), la courbe d'aimantation est anhystérétique (courbe rouge figure 7).

3.1.3. Pertes par excès :

Les pertes mesurées diffèrent de la somme des pertes par courant de Foucault et des pertes par hystérésis. La différence est appelée pertes par excès. Elles sont dues à l'existence des domaines de Weiss, [Weiss, 1907]. En effet le passage de l'induction d'un état stable à un autre se fait par mouvements de parois, par sauts (de Barkhausen). Ces sauts produisent des courants induits autour des parois en mouvement occasionnant des pertes [Brissonneau, 1997]. Plusieurs modèles de quantification de ces pertes par excès existent dans la littérature.

3.2. Modèles de pertes

Les modèles de pertes peuvent être classés en deux grands groupes, les modèles de pertes a priori et les modèles a posteriori. Les termes a priori et a posteriori font référence à la prise en compte des pertes en phase de résolution ou en post résolution.

3.2.4. A posteriori

Ces modèles de pertes sont largement illustrés par le modèles de pertes Bertotti, [Bertotti,1998] et Loss surface [Lebouc, 2006] que l'on traitera dans la section Calcul de pertes sous Flux. Comme leur nom l'indique, ces pertes sont calculées en phase d'exploitation une fois toutes les grandeurs physiques calculées. Ces méthodes sont réputées être moins précises que les modèles a priori puisque ne prenant en compte dans leur calcul que des champs consolidés. Cette classe comprend les modèles les plus couramment utilisés.

Nous voudrions les présenter par type de pertes modélisées, mais certains modèles cumulent plusieurs types. Nous les classerons donc en deux grands groupes, les modèles

globaux qui modélisent l'ensemble des pertes sur la tôle et les modèles semi globaux qui comprennent un ou plusieurs types de pertes sans couvrir tous les types.

3.2.4.1. Modèles semi globaux

a) Modèles D'hystérésis

- Modèle de Steinmetz

Il s'agit d'un des premiers modèles d'évaluation des pertes par hystérésis. Il se résume en une équation (datant du début du 20^{ème} siècle) purement empirique qui permet néanmoins de déterminer les pertes par hystérésis statique sous induction d'au plus 1 Tesla.

$$P = k_h B_m^n f$$

f : fréquence de travail.

B_m^n : induction maximale avec $n = 2$ pour des tôles fer-silicium FeSi.

k_h : facteur dépendant des propriétés de la tôles (physiques et géométriques).

Plusieurs modèles d'évaluation de ces pertes existent dans la littérature. Les plus utilisés sont basés sur des paradigmes différents : ce sont ceux de Preisach et de Jiles-Atherton [Jiles, 1986]

- Modèles de Preisach

Le modèle de Preisach considère le matériau magnétique comme constitué de particules magnétiques appelées hystérons et qui selon le champ imposé se retrouvent dans l'un des deux états stables permis $[-1;1]$ initié par [Bertotti,1988] dans sa théorie statistique sur les mouvement des parois de Bloch, [Sanna, 2013]. Ce modèle présente en sus, un facteur de retard de l'induction sur le champ magnétique (the rate dependent) ; facteur qui permet de prendre en compte l'augmentation de la surface du cycle d'hystérésis avec la montée en fréquence et donc une modélisation des pertes par excès.

- Modèles de Jiles

Le modèle de Jiles [Jiles, 1986] [voir **Jiles**] pouvant être scalaire ou vectoriel quant à lui part de considérations purement physiques. On fait appel au modèle direct ou inverse selon que la formulation en potentiel scalaire ou en potentiel vecteur est utilisée. Son principe général consiste en une décomposition de l'aimantation du matériau en somme d'une aimantation réversible \mathbf{M}_{rev} et d'une aimantation irréversible \mathbf{M}_{irr} qui en fait est un terme de pertes dû au processus d'ancrage/décrochage des parois magnétiques.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{rev}} + \mathbf{M}_{\text{irr}}$$

Pour le modèle scalaire direct, dans le cas où il n'y pas de phénomène d'ancrage /décrochage, l'aimantation se résume en une fonction anhystérétique

$$M_{\text{an}} = M_{\text{sat}} L\left(\frac{\mathbf{H}_e}{a}\right)$$

Où M_{sat} est l'aimantation à saturation, a le coefficient d'influence de l'aimantation anhystérétique, \mathbf{H}_e le champ effectif et L , la fonction de Langevin définie pour tout réel positif par :

$$L(x) = \left[\coth x - \frac{1}{x} \right]$$

[Jiles 1986], [Gabi, 2012], [Benabou, 2002].

- *Modèle Loss Surface (LS)* [Goutreau, 2005], [Maloberti, 2006], [Lebouc, 2006]

C'est un modèle d'hystérésis scalaire dynamique à champs moyens développé par le G2elab. Il fournit un champ total somme d'un champ statique prenant en compte les effets de l'hystérésis statique et d'un champ dynamique prenant en compte les effets des courants induits.

Ce modèle caractérise le matériau par la valeur instantanée de l'induction moyenne \mathbf{B}_m de sa dérivée temporelle $\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t}$ et par une surface caractéristique identifiée expérimentalement par des inductions de forme triangulaire d'amplitude donnée et à fréquence variable. Ce modèle lie le champ magnétique appliqué en surface à l'induction moyenne dans la section de la tôle.

En outre, il offre l'avantage de garder le lien avec la microstructure ainsi que les phénomènes à l'origine des pertes par excès. Aussi permet il de calculer en 2D statique et dynamique les hystérésis et pertes (locales et globales) sur un paquet de tôles [Sedkaoui, 2012]. Le modèle est capable aussi bien de décrire le gonflement du cycle avec la montée en fréquence que de réguler la déformation des cycles par les mesures.

Nous retenons que l'origine des pertes est principalement l'imperfection des matériaux entraînant à l'échelle microscopique des sauts de parois, puis à des courants induits microscopiques et macroscopiques dus respectivement aux mouvements des parois et à la variation macroscopique de l'induction dans le matériau. Les résultats démontrent en effet la forte dépendance des pertes à la variation de l'induction donc au rapport $\frac{dB_m}{dt}$ ou perméabilité incrémentale.

b) Modèles de pertes par excès

- Modèle de Pry et Bean

Il s'agit d'une première percée dans le domaine qui postule que les pertes sont majoritairement dues aux courants induits. Ce, après observation des domaines réguliers à aimantation opposée à parois rigides et infiniment allongées d'une tôle FeSi à graine orientée, figure 8. A l'état initial tous les domaines ont la même largeur. En dynamique, la variation du champ entraîne le déplacement de parois et donc des courants induits microscopiques (**Pertes par excès**).

Les pertes joules sont évaluées à partir d'un facteur d'anomalie K , de la largeur relative des domaines par rapport à l'épaisseur de la tôle et de l'amplitude relative du champ.

Cependant ce modèle prédit des pertes croissantes avec la fréquence [Meunier, 2006], [Maloberti, 2006], ce qui n'est pas le cas dans la réalité. Il trouve aussi sa limite dans son applicabilité à la modélisation de tous les matériaux magnétiques, [Pry & Bean, 1958].

- Modèle à champs moyens

[Meunier, 2008] propose un modèle à champs moyens qui fait la différence entre une échelle locale où les équations de Maxwell sont vérifiées et une échelle globale. Celle-ci fait l'hypothèse de champs continus \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{J} . Cependant le changement des lois de comportement lors du passage d'une échelle à une autre implique nécessairement de trouver une relation entre l'échelle globale et les phénomènes locaux (à l'échelle des domaines). On établit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{H} - \mathbf{h}_\mu & \mathbf{e} &= \mathbf{E} - \mathbf{e}_\mu \\ \mathbf{b} &= \mathbf{B} - \mathbf{b}_\mu & \mathbf{j} &= \mathbf{J} - \mathbf{j}_\mu \\ \text{roth}_\mu &= \mathbf{j}_\mu & \text{rot } \mathbf{e}_\mu &= -\frac{d\mathbf{b}_\mu}{dt} \end{aligned}$$

Où \mathbf{e} , \mathbf{j} , \mathbf{b} et \mathbf{h} sont des grandeurs locales et \mathbf{E} , \mathbf{J} , \mathbf{B} , \mathbf{H} des grandeur globales. \mathbf{h}_μ , \mathbf{e}_μ , \mathbf{b}_μ , \mathbf{j}_μ représentent la différence entre les grandeurs locales et les grandeurs globales.

En magnétostatique, le lien entre ces deux échelles est fait par une relation $\mathbf{B}=\mathbf{b}_s(\mathbf{H})$ ou encore $\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{b}_s(\langle \mathbf{h} \rangle)$. Cette relation traduit à l'échelle macroscopique la relation liant \mathbf{b} et \mathbf{h} à l'échelle locale; puisque $\mathbf{B}=\langle \mathbf{b} \rangle$ et qu'en magnétostatique $\mathbf{H}=\langle \mathbf{h} \rangle$.

En dynamique cette même relation liant \mathbf{B} à \mathbf{H} est maintenue en considérant que l'équilibre magnétostatique est maintenu et les champs locaux (courants de boucles générés par les parois en mouvement) agissent sur les champs moyens sans

fondamentalement modifier la structuration en domaines. Avec les mêmes considérations que précédemment, on écrit : $\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma \langle \mathbf{e} \rangle$.

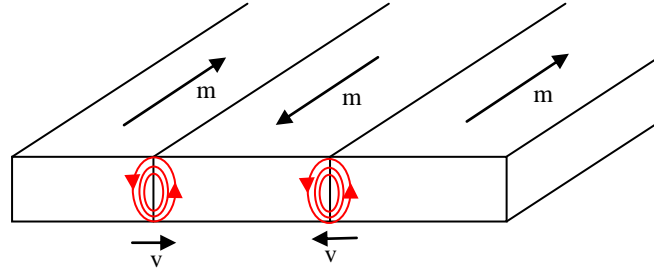


Figure 8 Courants induits dus aux déplacements de parois

On tire des développements précédents une expression générale des lois macroscopiques, avec cette fois-ci des champs macroscopiques vérifiant les équations de Maxwell :

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_s(\mathbf{H} - \langle \mathbf{h}_\mu \rangle)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} - \langle \mathbf{e}_\mu \rangle)$$

L'établissement de modèle de calcul de ces pertes par excès nécessitera d'exprimer les champs moyens $\langle \mathbf{h}_\mu \rangle$ et $\langle \mathbf{e}_\mu \rangle$.

Après plusieurs étapes de calcul développées dans [Meunier, 2008] une expression plus détaillée de ces lois de comportement est montrée par les relations :

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_s \left(\mathbf{H} - \sigma \left[\Lambda^2 \left(\mathbf{B}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Une approche similaire sera menée pour évaluer les pertes par courants de Foucault macroscopiques en transitoire. Le terme

$$\langle \mathbf{h}_\mu \rangle = \sigma \left[\Lambda^2 \left(\mathbf{B}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

montre bien une dépendance de Λ (propriété volumique tensorielle) à l'induction et à sa variation. Il pourra être remplacé par une autre expression analytique, elle aussi fonction de l'induction et de ses variations pour la modélisation des pertes par courants de Foucault. Ces expressions de champs de réaction moyens peuvent dans des cas particuliers nécessiter des dérivées d'ordre supérieurs de \mathbf{B} [Gyselinck & Dular, 2004] [Gyselinck, Geuzaine & Sabariego, 2011] pour les courants de Foucault et dans le cas des pertes par excès pour une configuration qui rendrait $\langle \mathbf{b}_\mu \rangle$ non négligeable devant \mathbf{B} [Meunier, 2008].

D'autres modèles de calcul de pertes par excès peuvent être cités comme celui développé dans [Brissonneau, 1997]. Nous ne donnerons pas plus de détails dessus. L'objectif de cet écrit étant d'étudier les pertes par courant de Foucault Macroscopiques. Le modèle à *champs moyens* n'étant développé dans ce texte que pour sa pertinence dans notre modélisation en transitoire des pertes par courants de Foucault macroscopiques.

Ces modèles continuent à être utilisés de nos jours et sont souvent couplés à d'autres modèles de pertes ou de matériau pour un spectre d'utilisation plus large. Dans la suite, nous allons nous intéresser aux modèles globaux.

3.2.4.2. Modèles globaux

Il s'agit essentiellement du modèle de Bertotti ;

- *Modèle de Bertotti [Bertotti,1998]*

Il est très largement utilisé. Il s'agit d'un modèle complet de pertes massiques qui prend en comptes dans son calcul et les pertes par excès, les pertes par Hystérésis statique et les pertes par courants de Foucault macroscopiques. Il est basé sur le principe de la séparation des pertes.

Il s'agit d'une étude statistique qui pour la première fois fait le lien entre l'équation empirique de Steinmetz et des grandeurs physiques identifiables. Il donne la formule

$$P_t/m_v = k_0 B_m^2 f + \frac{\pi^2 e^2 \sigma}{6 m_v} B_m^2 f^2 + k_1 B_m^\alpha f^\beta$$

f : fréquence de travail.

B_m^n : induction maximale avec $n = 2$ pour des tôles fer-silicium FeSi.

k_h : facteur dépendant des propriétés de la tôles (physiques et géométriques), où α et β dépendent du matériau et valent 3/2 pour des tôles FeSi. m_v est la masse volumique et e l'épaisseur de la tôle.

3.2.5. A priori

C'est le type de modèles de pertes étudié dans ce manuscrit. Les pertes sont prises en compte directement pendant la résolution. Ces modèles rendent plus fidèlement compte de l'impact de la variation des champs et des propriétés du matériau sur le calcul des

pertes. La qualité des résultats s'en trouve améliorée. Le fait que ce type de modèles soit peu répandu, nous amène à y porter un intérêt tout particulier dans cette thèse.

Plusieurs modèles permettent d'évaluer ces pertes. Aussi plusieurs modèles de matériaux (anisotropes et/ou non linéaires) [Guérin, 1994] peuvent venir en complément des modèles classiques de calcul de pertes. En basse fréquence (BF), ces modèles sont basés sur une approximation au premier ordre de la solution de l'équation différentielle en [Gyselinck, 1999] :

$$\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}$$

En effet faire cette première approximation, revient à l'échelle de la tôle à considérer une induction uniforme sur l'épaisseur.

D'autres modèles, notamment développés par [Gyselinck & Dular, 2004], [Gyselinck, Sabariego & Dular, 2005] viennent compléter ceux cités dans les paragraphes précédents et fournissent des solutions sans approximations Basse Fréquence (BF). Ils donnent ainsi l'expression d'une perméabilité magnétique dynamique du matériau permettant une quantification fiable des pertes. Krähenbühl [Krähenbühl, 2004] définit une fonction G caractéristique permettant de définir une perméabilité magnétique ainsi qu'une conductivité électrique dynamiques pouvant d'être substituées aux propriétés réelles du matériau, suivant un processus appelé homogénéisation sur lequel nous reviendrons tout au long de cet écrit.

Précédemment Carpenter propose de modéliser la pénétration du champ et les pertes associées dans les tôles [Carpenter, 1977]. Malgré leur bonne précision de calcul, ses modèles, ne seront pas explorés outre-mesure puisqu'ils traitent le problème sous un axe réseau de reluctance qui nous le verrons par la suite permettrait de lever certaines difficultés éprouvées à la modélisation des champs aux entrefers et les pertes y afférant. Le choix des modèles sont fixés par la société Cedrat en collaboration avec le G2elab en fonction de leur précision, leur facilité d'implémentation et d'intégration dans le logiciel Flux.

Nous nous intéresserons principalement aux modèles de pertes par courants de Foucault classiques. Pour les quantifier nous utilisons des techniques dites d'homogénéisation.

4. L'homogénéisation

4.1. Principe de l'homogénéisation

Défini comme le procédé visant à rendre homogène un composé, l'homogénéisation telle qu'on en parle en modélisation est virtuelle.

Elle consiste à créer un modèle équivalent au dispositif qu'on veut modéliser mais composé d'un matériau aux propriétés homogènes sur tout le dispositif. Le modèle obtenu est donc plus simple. Les phénomènes modélisés (pertes Joules dans notre cas) sont ensuite calculés à partir de ce modèle de matériau homogénéisé.

Cette approche offre l'avantage en plus de traiter globalement un problème, de s'affranchir de toutes les échelles intermédiaires de modélisation.

On notera que suivant le phénomène que l'on cherche à modéliser, l'homogénéisation se fera sur une ou plusieurs propriétés physiques du matériau de base.

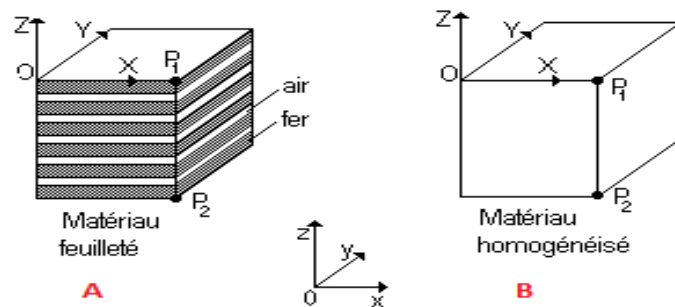


Figure 9 Principe de l'homogénéisation

Ce principe est résumé en figure 9. Il consiste à remplacer le circuit magnétique feuilleté de droite par celui de l'image de gauche bloc homogène uniforme ayant des propriétés équivalentes au bloc laminé.

Rappelons, que le but de notre étude est de modéliser les pertes par courants de Foucault dans les empilements de tôles magnétiques. Pour homogénéiser les paquets de tôles nous allons tenter de trouver un matériau équivalent isotrope avec des propriétés physiques équivalentes à celles du paquet de tôles (au moins du point de vue électrique et magnétique en vue du calcul de pertes).

Diverses méthodes sont proposées dont deux que nous exposerons. Nous nous contenterons de donner quelques lignes générales sur les autres méthodes.

4.2. Méthodes d'homogénéisation

Des méthodes analytiques sont choisies pour leur simplicité d'implémentation dans les cas d'étude transitoire et harmonique.

Pour le régime harmonique, on définit directement une loi de comportement équivalente (perméabilité, conductivité) comme propriété physique du matériau. Ainsi, la formulation utilisée pour la résolution n'est pas modifiée.

Par contre, en régime transitoire, la formulation utilisée est modifiée pour prendre en compte les pertes par courants de Foucault.

Avant d'aller plus loin dans ces méthodes d'homogénéisation, jetons un coup d'œil aux calculs préliminaires à l'homogénéisation proprement dite.

4.2.1. Calcul de pertes dans une tôle magnétique isotrope conductrice [Urma, 2000].

Soit le dispositif de la figure 10 représentant une tôle d'épaisseur d soumise à un champ magnétique variable suivant la direction x . Cette tôle a une conductivité $\sigma > 0$ et une perméabilité $\mu_r \geq 1$.

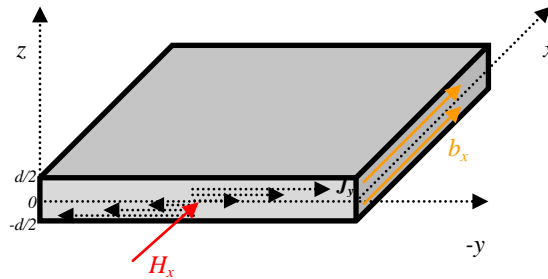


Figure 10 Bloc conducteur isotrope à étudier

Cette tôle est le siège de courants de Foucault J_y , du fait de la variation du champ imposé. Quantifier les pertes induites par ces courants J_y revient à calculer l'intégrale :

$$P_j = \int_v \rho J_y^2 dv$$

qui peut se réécrire

$$P_j = \int_v \sigma E_y^2 dv$$

en utilisant la loi $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ et sachant que la conductivité $\sigma = \frac{1}{\rho}$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t}$$

Or l'hypothèse basse fréquence nous permet de supposer \mathbf{B} uniforme dans l'épaisseur de la tôle, donc \mathbf{B} n'est pas fonction de z . Ce qui nous fait écrire que

$$\mathbf{E}_y(z) = \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} z + k$$

Le plan XOY est un plan de symétrie du bloc centré entre $z=-d/2$ et $z=d/2$. Au passage, les composantes normales de \mathbf{E} sont conservées : $\mathbf{E}_{n1} = \mathbf{E}_{n2}$.

Par contre les composantes tangentielles de \mathbf{E} sont modifiées : $\mathbf{E}_{t1} = -\mathbf{E}_{t2}$. De sorte que k est fixé par :

$$E_y(0) = k = 0$$

Les pertes deviennent donc :

$$P_j = \int_V \sigma \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t}^2 z^2 dv$$

Considérons un volume V pris sur le bloc (figure 11)

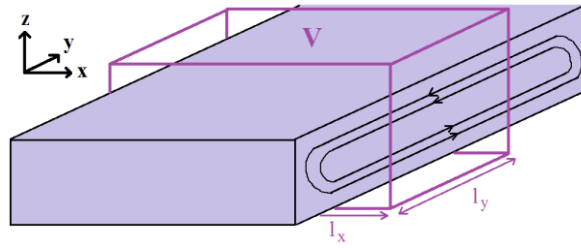


Figure 11 Volume d'étude sur un bloc conducteur

$$\begin{aligned} P_j &= \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t}^2 z^2 dx dy dz \\ &= l_x l_y \sigma \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t}^2 \frac{d^3}{12} \end{aligned}$$

qui correspond à des pertes joules instantanées en Watt (W). Nous obtenons les pertes instantanées en calculant la densité volumique de ces pertes.

$$p_j = \frac{P_j}{V} = \frac{\sigma d^2}{12} \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t}^2 \quad (60)$$

On garde en mémoire que l'équation (61) est une évaluation du premier terme de l'expression de la puissance électromagnétique obtenue par le biais de la divergence du vecteur de Poynting. D'où l'égalité :

$$\int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\sigma d^2}{12} \frac{d\mathbf{B}^2}{dt} \, d\Omega \quad (61)$$

Cette dernière équation donne l'expression analytique permettant de calculer les pertes par courant de Foucault sous hypothèse BF (Fréquence où les longueurs d'ondes concernées sont très grandes par rapport aux dimensions des dispositifs). A notre niveau on considérera l'induction uniforme sur l'épaisseur de la tôle à ces fréquences.

L'équation (60) permet de quantifier les pertes par courants de Foucault sur une tôle magnétique conductrice isotrope. L'expression analytique montre l'influence de l'épaisseur de la tôle sur les pertes occasionnées. En effet, diviser par 2 l'épaisseur de tôle entraîne une réduction de moitié des pertes par courant de Foucault toujours selon (60). On peut donc trouver dans le laminage une solution à la réduction des pertes, sauf que celui-ci apporte de nouvelles contraintes de modélisation. On peut citer, la difficulté de mailler les fines tôles et les isolants et les problèmes d'interconnexions entre éléments, de même que le nombre important d'éléments qui en résulte.

L'approche de l'homogénéisation consiste à pallier ces contraintes en remplaçant le bloc feuilleté par une région homogène dont les caractéristiques physiques sont remplacées par des propriétés équivalentes trouvées par calcul figure 12

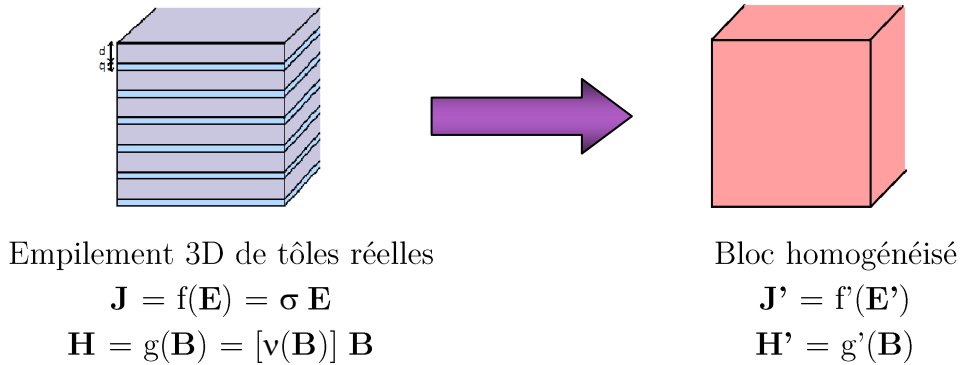


Figure 12 Principe de l'homogénéisation

où les lois f' (resp. g') sont de même nature que f (resp. g), sachant que ces dernières peuvent être linéaires ou non. \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{J} , \mathbf{H} étant les champs pour le bloc réel de tôles, \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{J}' , \mathbf{H}' sont les champs pour le bloc homogène.

4.2.2. Modification propriété du matériau, exemple de la modélisation 2D harmonique linéaire BF

Le but est ici de trouver une perméabilité équivalente en μ^* , fonction de la fréquence, qui prend en compte les phénomènes dynamiques dans la tôle et qui permet de calculer les pertes. Pourquoi une propriété équivalente en μ^* ?

On pourra répondre qu'en 2D tel expliqué dans la sous-section suivante, \mathbf{B} et \mathbf{H} sont dans le plan de la tôle ce qui induit nécessairement un \mathbf{J} orthogonal au plan 2D. Sauf qu'en modélisation 3D aussi, une homogénéisation en μ^* est utilisée, alors que \mathbf{J} y est bel et bien défini ;

Une autre explication possible repose sur le fait que la variation du champ sur le matériau magnétique a une incidence pouvant être assimilée à la création de moments magnétiques (micro boucles de courant) qui changent de sens suivant la polarisation du champ.

4.2.2.1. Procédé d'homogénéisation en régime harmonique

Le cas considéré est celui où le champ et l'induction magnétiques sont dans le plan des tôles. Le bloc réel de tôles est modélisé par un bloc homogène de conductivité nulle.

Pour obtenir la perméabilité équivalente l'expression (61) des pertes volumiques réelles est utilisée. Elle est ensuite comparée aux pertes du modèle théorique homogénéisé.

Etant défini comme non conducteur, la puissance sur le bloc homogène (55) donne :

$$P_{\text{Homo}} = \int_{\Omega} \mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\Omega$$

Pour \mathbf{B} sinusoïdal, dans le cas d'un matériau linéaire ($\mathbf{B} = \mu^* \mathbf{H}$; μ^* la perméabilité modifiée prenant en compte les pertes), \mathbf{H} et \mathbf{B} sont de la forme $\hat{k} e^{j\omega t}$, \hat{k} valeur crête

$$P_{\text{Homo}} = \frac{1}{2} j\omega \int_{\Omega} \mathbf{v}^* \|\mathbf{B}\|^2 d\Omega \quad (62)$$

or $\mathbf{v}^* = \frac{1}{\mu^*} = \mathbf{v}_{\text{Re}} + j \mathbf{v}_{\text{Im}}$; j opérateur complexe

$$P_{\text{Homo}} = \frac{1}{2} j\omega \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{\text{Re}} + j \mathbf{v}_{\text{Im}}) \|\mathbf{B}\|^2 d\Omega \quad (63)$$

La puissance calculée pour le bloc homogène est maintenant comparée à la puissance sur bloc réel de tôle pour pouvoir faire le lien entre grandeurs réelles et grandeurs homogénéisées.

Si l'on décompose la densité de puissance homogénéisée en somme de puissance active et réactive sur la base $P+jQ$, on obtient :

$$P_{\text{Homo}} = P_{J_{\text{Homo}}} + j Q_{\text{Homo}} \quad (64)$$

avec

$$P_{J_{\text{Homo}}} = -\frac{1}{2} \omega \int_{\Omega} \nu_{\text{Im}} \|\mathbf{B}\|^2 \quad (65)$$

Et

$$Q_{\text{Homo}} = \frac{1}{2} \omega \int_{\Omega} \nu_{\text{Re}} \|\mathbf{B}\|^2 \quad (66)$$

Afin d'identifier la puissance électromagnétique dans le bloc homogène à celle du bloc de tôle, la puissance sur le bloc feuilleté (réel) est exprimée de manière similaire. L'expression de la densité de puissance électromagnétique sur une tôle est donnée par

$$P_{\text{Réel}} = \int_{\Omega} \mathbf{E} \mathbf{J}^* d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}^*}{dt} d\Omega \quad (67)$$

où \mathbf{J}^* et \mathbf{B}^* sont des complexes conjugués

$$P_{\text{Réel}} = \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E}^2 d\Omega + \frac{1}{2} j \omega \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_f} \|\mathbf{B}\|^2 d\Omega \quad (68)$$

μ_f perméabilité de la tôle. Et donc

$$P_{J_{\text{Réel}}} = \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E}^2 d\Omega \quad (69)$$

$$Q_{\text{Réel}} = \frac{1}{2} \omega \frac{1}{\mu_f} \int_{\Omega} \|\mathbf{B}\|^2 d\Omega \quad (70)$$

Egaliser les pertes réelles et homogénéisées revient à comparer terme à terme les différents P_j ((65) et (69)) et Q ((66) et (70)). Une perméabilité complexe équivalente est ainsi déterminée. Il en ressort que :

$$\nu_{\text{Re}} = \frac{1}{\mu_{\text{Re}}} = \frac{1}{\mu_f} \quad (71)$$

$$\nu_{\text{Im}} = \frac{1}{\mu_{\text{Im}}} = -\frac{1}{12} \sigma \omega d^2 \quad (72)$$

A présent, la perméabilité équivalente qui permet de prendre en compte les pertes par courant de Foucault est complètement caractérisée.

En définissant cette perméabilité équivalente sur un matériau non conducteur, il est possible en 2D de faire des calculs de pertes sur un phénomène 3D. Rappelons que \mathbf{E} et \mathbf{J} sont orthogonaux au plan d'étude. Cependant les calculs précédents se font sous

l'hypothèse d'une induction uniforme dans l'épaisseur de la tôle ; ce qui est le cas en absence d'effet de peau (hypothèse basse fréquence). Ce modèle on le verra par la suite trouve sa validité limitée à des fréquences pour lesquelles le rapport $\frac{d}{2\delta} \ll 1$.

δ est l'épaisseur de peau. Aussi défini comme étant la profondeur de pénétration du champ dans le matériau, elle correspond réellement à la profondeur (dans le matériau) à laquelle la valeur de la densité de courant est égale à 37% de la densité en surface de la tôle. Il est fonction décroissante de la fréquence

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\pi\sigma f}}$$

4.2.3. Modification de la loi de comportement, exemple de l'homogénéisation 2D transitoire BF

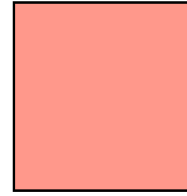
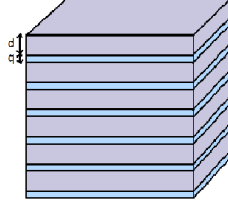
Nous exposons clairement ici, la modification de la loi de comportement.

Rappelons que l'équation (61) fournit l'expression analytique des pertes par courants de Foucault sur une tôle magnétique conductrice isotrope.

4.2.3.2. Procédé d'homogénéisation 2D transitoire

Certains dispositifs électromagnétiques transitoires sont modélisables par des modèles 2D. Le cas qui nous intéresse ici est celui du moteur électrique qui dans la plupart des cas est simulé en 2D. On note que les modèles 2D standards ne permettent pas le calcul «a priori» des pertes par courant de Foucault. Ces modèles «a priori» permettent de rendre compte de l'évolution des champs et des propriétés des matériaux à chaque instant dans le processus de calcul de pertes. Il en sort des résultats plus précis directement en résolution. Aussi ces méthodes permettent un meilleur couplage multiphysique puisqu'ils rendent comptent en temps réel de l'évolution de la température du matériau par exemple.

Rappelons que les hypothèses 2D conduisent à adopter une loi $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \mathbf{0}$ comme propriété électrique de notre surface homogénéisée. L'influence du terme électrique de (56) est quantifiée par (61). Cette expression (61) est ensuite introduite dans une nouvelle loi $\mathbf{H}' = g'(\mathbf{B})$. Déterminons g' par un bilan de puissances.



Empilement 3D de tôles réelles

$$\mathbf{J} = f(\mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = g(\mathbf{B}) = [\mathbf{v}(\mathbf{B})]\mathbf{B}$$

Surface 2D homogénéisée

$$\mathbf{J}' = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H}' = g'(\mathbf{B}) = ?$$

Le bilan de puissance par le vecteur de Poynting donne

$$P = - \int_{\Gamma_{\Omega}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\Gamma_{\Omega}$$

\Rightarrow

Calculs sur l'empilement 3D

$$P = \int_{\Omega} \left[\mathbf{E} \mathbf{J} + \mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} p_j d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\Omega$$

$$P = \int_{\Omega} \left[\frac{\sigma d^2}{12} \frac{d\mathbf{B}^2}{dt} + \mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \left[\mathbf{H} + \frac{\sigma d^2}{12} \frac{d\mathbf{B}^2}{dt} \right] \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\Omega$$

Calculs sur le modèle 2D

$$P = \int_{\Omega} \left[\mathbf{H}' \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{H}' \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\Omega$$

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{H}' \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{H}' \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\Omega$$

par identification, on trouve donc

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{\sigma d^2}{12} \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\mathbf{H}' = [\mathbf{v}(\mathbf{B})]\mathbf{B} + \frac{\sigma d^2}{12} \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

d'où g'

ou encore

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{\text{dyn}}$$

où $\mathbf{H}_s = [\mathbf{v}(\mathbf{B})]\mathbf{B}$, composante statique du champ

$\mathbf{H}_{\text{dyn}} = \frac{\sigma d^2}{12} \frac{d\mathbf{B}}{dt}$, composante dynamique permettant de quantifier les pertes.

Figure 13 Principe de l'homogénéisation 2D

Le schéma de l'homogénéisation est donc résumé dans par la figure 14

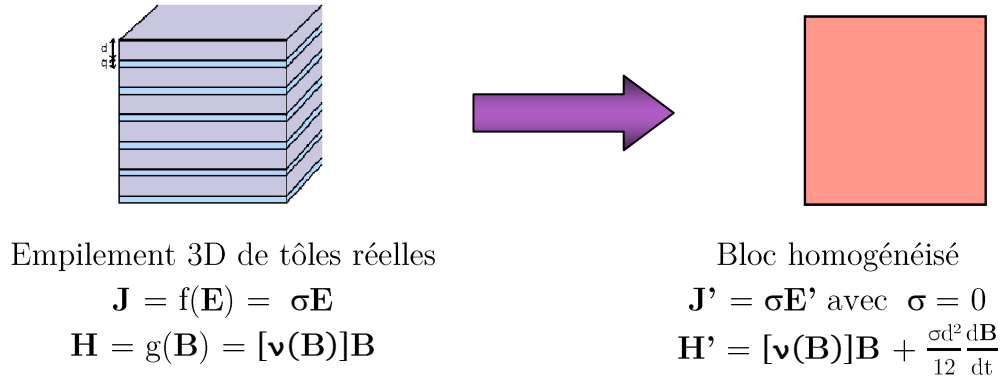


Figure 14 Résumé du principe de l'homogénéisation 2D

Nous noterons que \mathbf{H}' est composé d'une partie

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{B}) = [\mathbf{v}(\mathbf{B})]\mathbf{B}$$

, partie statique du champ \mathbf{H} et d'une partie dynamique qui est fonction des variations du champ et qui permet le calcul des pertes.

Pour calculer les pertes, la nouvelle loi $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ du matériau homogénéisé doit être appliquée à la formulation 2D.

4.2.4. Autres méthodes : Méthode numérique exemple de l'homogénéisation de cellule élémentaire

Dans cette section, les grandes lignes de cette technique sont données pour le moment. Un cas concret sur les empilements de tôles sera traité en 2D au chapitre 2.

Ben-Saïd, [Ben-Saïd, 2006] dans son homogénéisation des matériaux composites propose deux axes de réalisation :

- ✓ Un premier axe qui exprime une approche multi échelle consistant à définir le comportement global macroscopique grâce à des informations à l'échelle microscopique.
- ✓ Et un second axe expérimental qui permet à partir de l'expérimentation de définir les propriétés du matériau.

L'approche de la cellule numérique est une solution à mi-chemin sur les deux axes, si l'on peut assimiler la résolution numérique à une expérimentation. En effet, il permet

par une résolution sur une cellule numérique (périodique et centro-symétrique) de l'élément à modéliser, de découpler les lois électriques et magnétiques (rendu possible par la centro-symétrie [El Feddi, 1997]), et ainsi de déterminer les propriétés équivalentes, en partant sur des considérations de champs et courants aux deux échelles microscopiques et macroscopiques. Les entités macroscopiques étant celles obtenues par la résolution EF.

[Meunier, 2010] donne une méthode qui permet à partir de calculs sur une cellule élémentaire de bobinage soumis à un champ magnétique de pouvoir extrapoler les propriétés de cet échantillon à tout le bobinage. Cette cellule élémentaire est choisie de façon judicieuse : cellule centro-symétrique et périodique.

On notera que tous les dispositifs ne se prêtent pas à une telle homogénéisation dans les conditions décrites - un cas patent est celui d'une cellule d'empilement de tôles pris en 3D du fait de la nature complexe des phénomènes s'y déroulant : courants de Foucault dont l'incidence sur les champs consolidés est fonction de la position de la cellule dans l'empilement etc. En résumé, l'inhomogénéité des phénomènes sur la tôle prise en 3D la rendent impropre à une homogénéisation par cellule élémentaire sous les hypothèses évoquées précédemment.

On trouvera plus d'information sur ces techniques dans [Meunier, 2010], [El Feddi, 1997], [Sabariego, Dular & Gyselinck, 2008].

4.2.5. Autres méthodes : Méthode numérique exemple de résolution de formulations couplées.

[De Gersem, 2012] expose quant à lui une méthode d'homogénéisation basée un couplage 3D-2D. Plus précisément une première résolution est faite en 2D sur quelques tôles, ensuite les champs consolidés obtenus sont appliqués à l'empilement global 3D.

L'utilisation de cette méthode n'est pas envisageable dans notre cas vu la double résolution nécessaire.

Pour plus de détails se référer à [De Gersem, 2012], [Bottauscio, 2002].

4.3. Calcul de pertes déjà présent sous Flux

Certains modèles de pertes a posteriori comme Bertotti et LS sont déjà implémentés dans Flux. Le but de cette thèse est d'introduire dans Flux des modèles de pertes a priori.

Résumé

De ce chapitre nous retenons l'expression sous forme intégrale des équations de Maxwell, toutes définies en fonction des potentiels scalaires, vecteurs électriques et magnétiques : ces expressions sont appelées formulations. Cependant il existe d'autres formulations que celles présentées. Le choix des formulations présentées s'est fait sur la base de leur utilisation dans la suite.

L'on pourra retenir aussi que les pertes ont pour principale source les courants induits qui se développent à différentes échelles et les imperfections dans les matériaux magnétiques.

Les matériaux magnétiques sont naturellement subdivisés en domaines, suivant une configuration d'énergie minimale de l'ensemble. Sous l'action d'un champ, la forme des domaines est modifiée par et pour une orientation des moments magnétiques dans la direction d'aimantation. Ces déplacements n'étant pas linéaires, le phénomène d'hystérésis apparaît avec les pertes par cycle qu'il occasionne. On notera que ces pertes sont fonctions croissantes de la largeur du cycle. Ces déplacements de parois génèrent des courants induits à l'échelle de la structure du matériau d'où les pertes par excès. Des courants induits macroscopiques dus cette fois ci à la variation de l'induction génèrent les pertes par courant de Foucault classiques.

Divers modèles tentant d'évaluer ces pertes existent. Certains procèdent à la séparation des pertes comme les modèles de Bertotti dont l'expression de calcul comprend un terme pour chaque type de perte. D'autres modèles comme LS, Preisach et Jiles se basent sur des paradigmes différents mais regroupent les termes par courant de Foucault classiques et celles par hystérésis d'où le nom de modèles hystérésis dynamiques. Des modèles de pertes par excès existent, comme ceux développés dans la thèse O. Maloberti [Maloberti 2006]. Une approche similaire sera appliquée à la modélisation des pertes par courant de Foucault dans nos travaux.

Enfin, on notera que ces modèles cités évaluent les pertes après résolution sur des champs consolidés, ne tenant nullement compte des variations de champs (modèles dits «a posteriori»). D'où l'intérêt de ce travail qui consiste à implémenter des modèles de pertes a priori donc de calcul de pertes directement en résolution.

Le chapitre suivant suivra le fil des modèles développés pour le calcul des pertes sur les dispositifs 2D.

Références :

1. [Benabou, 2002] A. Benabou, “Contribution à la caractérisation et à modélisation de matériaux magnétiques en vue d’une implantation dans un code de calcul de champ“, Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 2002.
2. [Ben-Saïd, 2006] S. Ben-Saïd, “Contribution à la caractérisation et à la modélisation électromagnétique et thermique de matériaux composites anisotropes“. Thèse de doctorat Université de Nantes, 2006.
3. [Bertotti, 1988] G. Bertotti, F. Fiorillo and G. P. Soardo, “The prediction of power losses in soft magnetics materials“, Journal de Physique, Décembre 1988.
4. [Bertotti, 1998] G. Bertotti, “Hysteresis in Magnetism: For Physicists, Materials Scientists, and Engineers“, Academic Press, 1998.
5. [BIRO, 1989] O. Biro, K. Preis, “On the use of the magnetics vector potential in the finite element analysis of the three dimensional eddy currents“, IEEE Transactions on magnetics, vol. 25, n°4, p. 92, July 1989.
6. [Bottauscio, 2002] O. Bottauscio & M. Chiampi, “Analysis of laminated cores through a directly coupled 2D-1D electromagnetics field formulation“, IEEE Transactions on magnetics, vol. 38, n°5 pp. 2358-2360, September, 2002.
7. [Brissonneau, 1997] P. Brissonneau, “Magnétisme et matériaux de l’électrotechnique“, Hermès 1997.
8. [Carpenter, 1977] C.J. Carpenter, “Theory of flux penetration into laminated iron and associated losses“, PROC. IEEE, vol. 124, n°7, July 1977.
9. [Coulomb, 1981] J-L. Coulomb, “Analyse tridimensionnelle des champs électrique et magnétique par la méthode des éléments finis“. Thèse de doctorat d’état, Université scientifique et médicale de Grenoble, 1981.
10. [De Gersem, 2012] H. De Gersem, S. Vanaverbeke, G. Samaey, “3D-2D coupled model for eddy currents in laminated iron cores“, IEEE Transactions on magnetics, vol. 42, n°2, pp. 815-818, February, 2012.

11. [Dular, 1996] P. Dular, “Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans les systèmes tridimensionnels non linéaires“. Thèse de doctorat, Université de Liège 1996.
12. [El Feddi, 1997] M. El Feddi, Z. Ren, A. Razek, A. Bossavit, “Homogenization technique for Maxwell equations in periodic structures”, IEEE Transactions on magnetics, vol. 33, n°2 pp-1382-1385, March 1997.
13. [Emson & Simkin, 1983] C. Emson & J. Simkin, “An optimal method for 3D eddy currents“, IEEE Transactions on magnetics, vol. 19, p 2480, November 1983.
14. [Faure, 2012] M. Faure, “Calcul des pertes Joule dans les circuits magnétiques 2D avec des techniques d'homogénéisation“, Stage ISIMA, CEDRAT, G2elab, 2012.
15. [Gabi, 2012] Y. Gabi, “Modélisation FEM su système de contrôle 3MA sur des aciers dual phase en ligne“, Thèse de doctorat, Grenoble INP, avril 2012.
16. [Golovanov, 1993] C. Golovanov, “Implantation de formulations magnétodynamiques tridimensionnelles“, Stage Leg Ensieg, 1993.
17. [Goutreau, 2005] T. Goutreau, “Estimation des pertes fer dans les machines électriques. Modèle d'hystérésis Loss Surface et application aux machines synchrones à aimant“. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2005.
18. [Guérin, 1994] C. Guérin, “Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves des transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique“. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, 1994.
19. [Gyselinck & Dular, 2004] J. Gyselinck & P. Dular, “A time-domain homogenization for laminated iron cores in 3D finite element models“. IEEE Transactions on magnetics, vol. 40, n°2, march 2004.
20. [Gyselinck, Sabariego & Dular, 2005] J. Gyselinck, R. Sabariego & P. Dular, “A nonlinear time-domain homogenization technique for laminated iron cores in

three-dimensional finite element models", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 42, n°4 pp. 763-766, april 2006.

21. [Gyselinck, Geuzaine & Sabariego, 2011] J. Gyselinck, C. Geuzaine, & R. V. Sabariego. Considering laminated cores and eddy currents in 2d and 3d finite element simulation of electrical machines. In Proceedings of the 18th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG2011), Sydney, Australia, July 12-15, 2011.
22. [Gyselinck, 1999] J. Gyselinck, L. Vendevelde and JMelkebeek, "Calculation of eddy currents and associated losses in electrical steel lamination", IEEE Transactions on magnetics, vol. 35, n°3, pp. 1191-1194, 1999.
23. [JILES 1986] D.C. Jiles and D.L. Atherton. "Theory of ferromagnetics hysteresis. Journal of Magnetism and Magnetics Materials", vol. 61, pp. 48-60, 1986.
24. [Krähenbühl, 2004] L. Krähenbühl, P. Dular, T. Zeidan and F. Buret, "Homogenization of lamination stacks in linear magnetodynamics", IEEE Transactions on magnetics AIM, vol. 40 n°2, pp. 111-123, 2004.
25. [Lebouc, 2006] A. Kedous-Lebouc "Matériaux magnétiques en génie électrique", Lavoisier 2006.
26. [Maloberti 2006] O. Maloberti, "Contribution à la modélisation de la dynamique d'aimantation dans les matériaux magnétiques doux : caractérisation et simulation", Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2006.
27. [Mazauric, 2005] V. Mazauric, O. Maloberti, G. Meunier, A. Kedous-Lebouc, O. Goeffroy, P. Rebière, "An energy-based model for dynamic hystérésis", IEEE Transactions on magnetics, vol. 41, n°10 pp. 3766-3768, april 2005.
28. [Meunier, 2008] G. Meunier, O. Maloberti, A. Kedous-Lebouc, "Pertes dynamiques dans les matériaux magnétiques", European Journal of Electrical Engineering RIGE, VOL 11/2-3, pp.303-332, 2008.
29. [Meunier, 2010] G. Meunier, V. Charmoille, C. Guérin, P. Labie and Y. Marechal, "Homogenization for periodical electromagnetics structure :Which

formulation ? “, IEEE Transactions on magnetics, vol. 46, n°8, pp. 3409-3412, 2010.

30. [Pry & Bean, 1958] R. Pry, C. Bean, “Calculation of the energy loss in magnetics sheet materials using domain model“.
31. [Ramdane, 2009] B. Ramdane, “Contribution à la modélisation tridimensionnelle de la technique thermo inductive de contrôle non destructif : Développement d’un outil de conception, d’analyse et d’aide à la décision“, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2009.
32. [Sabariego, Dular & Gyselinck, 2008] R. Sabariego, P. Dular, and J. Gyselinck, “Time-domain homogenization of windings in 3-D finite element models“, IEEE Transactions on Magnetism, vol.44, n°6, pp. 1302-1305, june 2008.
33. [Sabonnadière & Coulomb, 1986] J-C. Sabonnadière, J-L. Coulomb, “Elements finis et CAO“, Hermès 1986.
34. [Sanna, 2013] K. Sanna, “Modèles de représentation des matériaux ferromagnétiques avec prise en compte de l’hystérésis dans le logiciel Flux“, Stage de fin d’études, UFR IMAG, UJF, CEDRAT 2013.
35. [Sedkaoui, 2012] L. Sedkaoui, “Etude des pertes magnétiques dans les tôles des transformateurs en relation avec la forme de l’induction“, Mémoire de magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, 2012.
36. [Univ-Mans] http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M08_G01/co/grain_25.html, Vu le 13/01/2014.
37. [Urma, 2000] D. Urma, G. meunier, C. Golovanov, “Magnetostatic phenomena and eddy currents losses modeling in a lamination core“. LEG Ensieg 2000.
38. [Weiss, 1907] P. Weiss, “L’hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique“, Journal de Physique, 4^{ème} série T-IV, septembre 1907.

Liste des figures

Figure 1 Exemple de paquet de tôles (noyau de rotor d'une machine synchrone)

Figure 2 Domaine d'étude

Figure 3 Interface entre deux milieux Ω_1 et Ω_2

Figure 4 système 2D

Figure 5 Problème type sans source de courant

Figure 6 Disposition en domaines du matériau magnétique

Figure 7 Cycle d'hystérésis

Figure 8 Courants induits dus aux déplacements de parois

Figure 9 Principe de l'homogénéisation

Figure 10 Bloc conducteur isotrope à étudier

Figure 11 Volume d'étude sur un bloc conducteur

Figure 12 Principe de l'homogénéisation

Figure 13 Principe de l'homogénéisation 2D

Figure 14 Résumé du principe de l'homogénéisation 2D

Annexes

[Newton-Raphson] :

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative qui permet de trouver les racines d'une équation par des approximations successives de la solution. Elle est basée sur un développement de limité en série de Taylor au premier ordre. Le développement en série de Taylor au premier ordre du résidu (30) donne :

$$R(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}) + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{A}}(\Delta\mathbf{A}) + \theta(\Delta\mathbf{A}^2)$$

Le terme du second ordre est négligé, il nous restera donc à déterminer le terme de la matrice tangente $\frac{\partial R}{\partial \mathbf{A}}(\Delta\mathbf{A})$. Pour trouver la solution, à chaque itération on résout le système linéaire suivant :

$$= [R(\mathbf{A})]_k + \left[\frac{\partial R}{\partial \mathbf{A}} \right]_k [(\Delta\mathbf{A})]_{k+1} = 0 \quad (1)$$

Avec une incrémentation à chaque itération du vecteur solution tel que :

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k + [(\Delta\mathbf{A})]_{k+1} \quad (2)$$

Calculons le terme de la matrice tangente en fonction des inconnues que nous nommerons A_j .

$$\frac{\partial R_i}{\partial A_j} = L \int_{\Gamma_\Omega} \text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial A_j} d\Gamma_\Omega \quad (3)$$

Si nous considérons que : $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial A_j} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}^t} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial A_j}$ et que $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial A_j} = \text{rot}_{2D}(w_j)$ cf. (27), finalement on trouve :

$$\frac{\partial R_i}{\partial A_j} = L \int_{\Gamma_\Omega} \text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}^t} \text{rot}_{2D}(w_j) d\Gamma_\Omega \quad (4)$$

[Jiles] :

Le modèle de Jiles, [Jiles, 1986] est un modèle d'hystérésis pouvant être scalaire ou vectoriel. On fait appel au modèle direct ou inverse selon que la formulation en potentiel scalaire ou en potentiel vecteur est utilisée. Il est basé sur des considérations purement physiques.

Le principe général du modèle de Jiles repose dans une décomposition de l'aimantation du matériau en somme d'une aimantation réversible \mathbf{M}_{rev} et d'une aimantation

irréversible \mathbf{M}_{irr} qui en fait est un terme de pertes du au processus d'ancrage/décrochage des parois magnétiques.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{rev}} + \mathbf{M}_{\text{irr}}$$

Pour le modèle scalaire direct, dans le cas ou il n'y pas de phénomène d'ancrage /décrochage, l'aimantation se résume en une fonction anhystérétique :

$$M_{\text{an}} = M_{\text{sat}} L\left(\frac{\mathbf{H}_e}{a}\right)$$

Où M_{sat} est l'aimantation à saturation, a le coefficient d'influence de l'aimantation anhystérétique, \mathbf{H}_e le champ effectif et L fonction de Langevin définie pour tout réel positif par :

$$L(x) = \left[\coth x - \frac{1}{x} \right]$$

Des différentielles de l'aimantation par rapport au champ magnétique sont ensuite calculées aboutissant ainsi à l'équation différentielle de du modèle de Jiles -Atherton.

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} = \frac{c \frac{d\mathbf{M}_{\text{an}}}{d\mathbf{H}_e} + (1-c) \frac{d\mathbf{M}_{\text{irr}}}{d\mathbf{H}_e}}{1 - \alpha c \frac{d\mathbf{M}_{\text{an}}}{d\mathbf{H}_e} - \alpha(1-c) \frac{d\mathbf{M}_{\text{irr}}}{d\mathbf{H}_e}}$$

Où c est un coefficient lié à la réversibilité du matériau $[-1;1]$ et α un facteur d'interaction entre domaines.

Cette différentielle $\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}}$ est ensuite pris en compte dans le calcul de l'aimantation à chaque pas de temps par la formule :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M} + \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} . d\mathbf{H}$$

De plus amples détails sur les calculs des modèles directs et inverses sont disponibles dans [Jiles 1986], [Gabi, 2012], [Benabou, 2002].

[Jauges] :

\mathbf{T} étant défini à un potentiel scalaire près, Les conditions de jauge permettent de fixer un unique \mathbf{T} pour la résolution du système. Ici nous traitons le cas de la formulation $\mathbf{T}-\phi$.

Vérifions que ce système impose bien la jauge de Coulomb sur le domaine V_1 .

Sachant (49), la divergence de l'équation (48) donne :

$$\Delta.(\sigma^{-1}\mathbf{divT}) = 0$$

sur V_1 . Passons à la vérification de l'application de la condition de jauge sur les frontières.

- Sur Γ_E , \mathbf{E} normal induit une induction \mathbf{B} tangentielle donc $\mathbf{B.n} = 0$.
- Prenons la composante normale de l'équation (48) et vérifions la condition de jauge

On obtient :

$$\mathbf{n.rot}\left(\mathbf{rot}(\sigma^{-1}\mathbf{rotT})\right) - \frac{\partial}{\partial n}(\sigma^{-1}\mathbf{divT}) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B.n}) = 0$$

Or $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B.n}) = 0$ du fait de la condition Γ_B, Γ_E sur V_1 .

De même en réécrivant le premier terme [Emson & Simkin, 1983]

$$\mathbf{n.rot}\left(\mathbf{rot}(\sigma^{-1}\mathbf{rotT})\right) = -\mathbf{div}(\mathbf{n} \times \sigma^{-1}\mathbf{rotT}) = 0$$

il ressort : $-\frac{\partial}{\partial n}(\sigma^{-1}\mathbf{divT}) = 0$ d'où la condition de jauge sur Γ_E .

On impose par la suite $\sigma^{-1}\mathbf{divT} = 0$ sur Γ_1 pour finir d'imposer la condition de jauge sur tout V_1 .

[Conditions aux limites] :

Les conditions aux limites permettent de vérifier les conditions de continuité des champs et potentiels. Nous traitons toujours de la formulation \mathbf{T} - ϕ .

Par la suite, première équation du système à résoudre pour cette formulation devient :

$$\begin{aligned} \int_{V_1} & \left[\mathbf{rotW.rot}(\sigma^{-1}\mathbf{rotT}) + \mathbf{divW}.\sigma^{-1}\mathbf{divT} + \mathbf{W}.\mu_1 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{T} - \mathbf{grad}\phi) \right] dv \\ & - \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{W}.(\sigma^{-1}\mathbf{rotT} \times \mathbf{n}_1) ds - \int_{\Gamma_E} \mathbf{W}.(\sigma^{-1}\mathbf{rotT} \times \mathbf{n}_1) ds \\ & - \int_{\Gamma_{12}} [\mathbf{W.n}_1 . \sigma^{-1}\mathbf{divT}] ds - \int_{\Gamma_E} [\mathbf{W.n}_1 . \sigma^{-1}\mathbf{divT}] ds \\ & - \int_{\Gamma_i} [\mathbf{W}.(\sigma^{-1}\mathbf{rotT}) \times \mathbf{n}_i] ds - \int_{\Gamma_i} [\mathbf{W}.(\sigma^{-1}\mathbf{divT}) . \mathbf{n}_i] ds = 0 \end{aligned} \tag{73}$$

avec :

- \mathbf{n}_1 normale sortant du volume 1
- \mathbf{n}_i normale sortant de la surface Γ_i
- Γ_i l'ensemble des surfaces comportant une discontinuité de conductivité entrainant une discontinuité de $\sigma^{-1}\mathbf{rot}\mathbf{T}$

D'où

$$\begin{aligned} & - \int_{v_1} (\mathbf{grad} w_i \cdot \mu_1 \mathbf{T}) dv + \int_{v_1} (\mathbf{grad} w_i \cdot \mu_1 \mathbf{grad} \phi) dv \\ & + \int_{\Gamma_{12}} (w_i \cdot \mu_1 (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \phi) \cdot \mathbf{n}_1) ds + \int_{\Gamma_E} (w_i \cdot \mu_1 (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \phi) \cdot \mathbf{n}_1) ds = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Dans la région conductrice

$$- \int_{v_1} (\mathbf{grad} w_i \cdot \mu_2 \mathbf{grad} \phi) dv - \int_{\Gamma_{12}} (w_i \cdot \mu_2 \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n}_2) ds + \int_{\Gamma_H \cup \Gamma_B} (w_i \cdot \mu_2 \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n}_2) ds = 0 \quad (75)$$

Dans la région non conductrice.

- Réduction des équations par application des conditions aux limites

Dans l'équation (73) ;

- Sur Γ_{12}

$$\int_{\Gamma_{12}} \mathbf{W} \cdot (\sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T} \times \mathbf{n}_1) ds = - \int_{\Gamma_{12}} \sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} \times \mathbf{n}_1) ds$$

Sur Γ_{12} les fonctions de pondération vérifient $(\mathbf{W} \times \mathbf{n}) = 0$. D'où une intégrale nulle.

Aussi

$$\int_{\Gamma_{12}} [\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_1 \cdot \sigma^{-1} \mathbf{div} \mathbf{T}] ds = 0$$

puisque $\mathbf{div} \mathbf{T} = 0$ sur cette surface.

- Sur Γ_E et Γ_i

$$\int_{\Gamma_E} \mathbf{W} \cdot (\sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T} \times \mathbf{n}_1) ds + \int_{\Gamma_i} [\mathbf{W} \cdot (\sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T}) \times \mathbf{n}_i] ds = 0$$

pour assurer la continuité de la composante tangentielle du champ électrique

De plus

$$\int_{\Gamma_E} [\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_1 \cdot \sigma^{-1} \mathbf{div} \mathbf{T}] ds + \int_{\Gamma_i} [\mathbf{W} \cdot (\sigma^{-1} \mathbf{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n}_i] ds = 0$$

Pour assurer la continuité de $\sigma^{-1} \mathbf{div} \mathbf{T}$.

Dans l'équation (74), avec la suppression de l'intégrale surfacique sur Γ_E , le terme sur Γ_{12} s'annule en considérant :

$$\int_{\Gamma_{12}} (w_i \cdot \mu_1 (\mathbf{T} - \mathbf{grad}\phi) \cdot \mathbf{n}_1) \, ds = \int_{\Gamma_{12}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0$$

Chapitre 2 : Modèles 2D

« Le fait est, on dirait, que tout ce qu'on peut espérer c'est d'être un peu moins, à la fin, celui qu'on était au commencement. »

Samuel Beckett

Modèles 2D

Introduction

Les modèles 2D permettent de reproduire le comportement des dispositifs électromagnétiques présentant soit une symétrie axiale, soit ayant une invariance suivant la troisième dimension. Cette dernière hypothèse suppose que les effets d'extrémités dans la troisième direction sont négligeables.

Ces modèles peuvent être en particulier applicables à une grande famille de dispositifs dont font partie les moteurs électriques.

Dans ce chapitre sur les modèles 2D, deux principales sections sont à distinguer, une première sur les modèles transitoires et une seconde sur les modèles harmoniques.

La section sur les modèles transitoires présentera la formulation 2D modifiée et la validation de différents modèles linéaire et non linéaire en BF. La partie harmonique quant à elle, présentera dans les détails les modèles analytique et numérique qui seront validés sur un large spectre Haute Fréquence (HF) et Basse Fréquence (BF). Il s'en suivra une validation puis une conclusion générale sur les modèles 2D développés. Notons que la différence BF et HF est faite suivant la valeur du rapport $d/2\delta$.

Remarque : Dans la suite, la plupart des calculs sont effectués dans un cadre général 3D et sont utilisés en 2D en faisant abstraction des entités non tangentielles au plan de laminage.

Les modèles transitoires qui suivent sont basés sur les calculs présentés au premier chapitre présentant la quantification des pertes (cf. I.4.2.1.).

1. Modèles transitoires en basse fréquence (BF)

On parle de modèles BF quand ceux-ci, font l'hypothèse de l'électrotechnique à savoir des dimensions de dispositifs électromagnétiques très faibles par rapport aux longueurs d'ondes correspondant aux fréquences d'étude. Ceci se traduit par la négligence du terme de courants de déplacements dans l'équation de Maxwell-Ampère [Dular, 1996]. Dans notre cas nous ferons en outre l'hypothèse d'absence d'effet de peau.

Les applications transitoires sont des applications qui sont le siège de variations des champs électromagnétiques dans le temps. En transitoire, contrairement au cas harmonique ces variations peuvent être périodiques ou non. Des modèles linéaire et non linéaire seront présentés dans cette section ainsi que des cas de validation de ces modèles. Les validations feront l'objet de discussions sur les limites et sur les principales pistes d'amélioration.

1.1. Modèle de matériau

Dans un souci de cohérence de la présentation de la formulation modifiée, nous réservons une première partie consacrée aux calculs préliminaires de grandeurs utilisées par la suite. On les invoquera (par des renvois) dans les sous-sections où elles interviennent.

1.1.1. Coefficient de foisonnement

L'équation I.(59) montre l'intérêt du laminage dans la réduction des pertes par courants de Foucault et énonce la règle: diviser l'épaisseur de tôles par 2 revient à diviser les pertes par 2.

Notons par ailleurs que l'équation I.(59) est développée pour le calcul des pertes sur une tôle. Pour un calcul sur un bloc feuilleté, les équations de la formulation 2D doivent prendre en compte la spécificité du laminage en intégrant dans les calculs, la proportion de tôle dans le bloc feuilleté. En d'autres termes, en intégrant la présence des couches isolantes dans le modèle, on définit le coefficient de foisonnement :

$$\lambda = \frac{d}{d + q} \quad (1)$$

Où d : représente l'épaisseur d'une tôle du bloc et q l'épaisseur de la couche isolant entre les tôles du bloc.

Ce ratio aura une forte influence sur la précision des modèles. (Ce ratio est souvent grossièrement pris à 1).

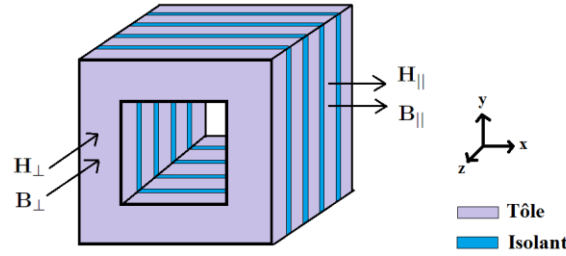


Figure 1 schéma d'un noyau feuilleté

Considérons le noyau feuilleté qu'illustre la figure 1. Ce noyau est constitué d'une superposition de couches de tôles et de couches isolantes prises toutes en compte par λ .

NB : Ce coefficient permettra ensuite de définir dans un cadre général 3D des perméabilités (ou réluctivités) normale et tangentielle applicables à une homogénéisation 3D. On notera cependant que dans le cas précis 2D, seule la perméabilité (ou réluctivité) tangentielle est utile.

Le paragraphe suivant traite du calcul de ces entités normales et tangentielles.

1.1.2. Calcul des réluctivités homogénéisées

Soit le dispositif de la figure 2 représentant une cellule d'empilement composée d'une tôle isotrope entre deux couches non magnétiques et électriquement isolantes. Pour déterminer les propriétés magnétiques dans chacune des directions sur le bloc homogénéisé, cette cellule ainsi que son bloc homogène équivalent sont soumis premièrement à un champ \mathbf{H}_{\parallel} parallèle au plan de laminage, et deuxièmement à un champ \mathbf{H}_{\perp} orthogonal à celui ci.

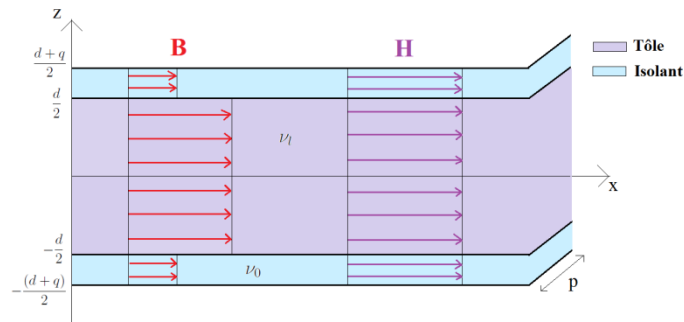


Figure 2 Comportements magnétiques dans une cellule d'empilement

- \mathbf{H} représente champ magnétique
- \mathbf{B} , l'induction magnétique
- d , l'épaisseur de la tôle
- q , l'épaisseur de l'isolant
- ν_i , la réluctivité de la tôle

- ν_0 , la réluctivité de l'isolant
- p , longueur selon l'axe OY de la cellule étudiée
- *Champ imposé parallèle au plan des tôles*

Tâchons de trouver le lien entre champs sur une cellule réelle (figure 2) et ceux sur un bloc homogénéisé. Pour cela la loi de conservation du flux sur une section S (sur le plan YOZ) de la cellule est écrite :

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} ds$$

Sur l'empilement réel de tôles
 $\Phi = pq\mathbf{B}_0 + pd\mathbf{B}_1$

Sur le bloc homogénéisé
 $\Phi_{||} = p(d + q)\mathbf{B}_{||}$

En égalisant les deux quantités on obtient :

$$\mathbf{B}_{||} = \frac{q}{d + q}\mathbf{B}_0 + \frac{d}{d + q}\mathbf{B}_1$$

et donc

$$\mathbf{B}_{||} = (1 - \lambda)\mathbf{B}_0 + \lambda\mathbf{B}_1 \quad (2)$$

L'induction magnétique sur le bloc homogénéisé $\mathbf{B}_{||}$ est ainsi écrite en fonction de l'induction dans la tôle \mathbf{B}_1 et de l'induction dans l'isolant \mathbf{B}_0 .

On peut définir de manière similaire à l'induction, $\mathbf{H}_{||}$ champ magnétique dans le bloc homogénéisé ainsi que \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_0 respectivement champ magnétique dans la tôle et dans l'isolant, [Carpenter, 1977].

La conservation de la composante tangentielle de \mathbf{H} (cf. I.(9)) permet d'écrire:

$$\mathbf{H}_{||} = \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1 \quad (3)$$

Cette relation est vérifiée dans le cas statique, et est supposée vérifiée en dynamique en négligeant l'effet des phénomènes dynamiques à l'échelle d'une tôle.

Il est donc possible déterminer la relation entre le champ et l'induction homogénéisés telle que :

$$\mu_t = \frac{1}{\nu_t} = \frac{\mathbf{B}_{||}}{\mathbf{H}_{||}}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{\nu_t} = (1 - \lambda)\frac{\mathbf{B}_0}{\mathbf{H}_0} + \lambda\frac{\mathbf{B}_1}{\mathbf{H}_1} \quad (4)$$

En considérant l'équation (3), il vient que :

$$\nu_t = \frac{1}{\mu_t} = \frac{\nu_0 \nu_l}{(1 - \lambda)\nu_l + \lambda\nu_0} \quad (5)$$

- *Champ imposé normal au plan des tôles (spécifique au 3D)*

Aussi pour un champ \mathbf{H}_\perp normal imposé dans la cellule, la circulation de \mathbf{H}_\perp sur une boucle traversant la cellule orthogonalement au plan de laminage donne :

$$\mathbf{H}_\perp = (1 - \lambda)\mathbf{H}_{l\perp} + \lambda\mathbf{H}_{0\perp} \quad (6)$$

Avec $\mathbf{H}_{l\perp}$ le champ magnétique normal entre les deux couches isolantes de la cellule et $\mathbf{H}_{0\perp}$ le champ magnétique dans l'isolant

$$\mathbf{H}_\perp = \frac{\mathbf{B}_\perp}{\mu_\perp} = (1 - \lambda)\frac{\mathbf{B}_{l\perp}}{\mu_l} + \lambda\frac{\mathbf{B}_{0\perp}}{\mu_0} \quad (7)$$

Or, à l'interface tôle-isolant la relation suivante est vérifiée cf. I.(11)

$$\mathbf{B}_\perp = \mathbf{B}_{l\perp} = \mathbf{B}_{0\perp}$$

Il en ressort que :

$$\nu_n = \frac{1}{\mu_n} = (1 - \lambda)\nu_0 + \lambda\nu_l \quad (8)$$

où $\nu_l = \frac{1}{\mu_l}$ est la réductivité de la tôle et $\nu_0 = \frac{1}{\mu_0}$ la réductivité des couches isolantes.

Comme vu dans le chapitre 1, la résolution d'une formulation \mathbf{A} en transitoire requiert généralement la détermination de \mathbf{H} et de $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}^t}$ (cf. I.2.1.1.). Le terme de la matrice est calculé dans cette sous-section en guise de calcul préliminaire. Ces calculs sont développés pour le cas plus réaliste d'un matériau non linéaire. Le cas linéaire pourra en découler facilement.

1.1.3. Calcul de $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}^t}$ tenseur de réductivité différentielle non linéaire

Pour le matériau homogène :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}^t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial B_x} & \frac{\partial H_x}{\partial B_y} & \frac{\partial H_x}{\partial B_z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial B_x} & \frac{\partial H_y}{\partial B_y} & \frac{\partial H_y}{\partial B_z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial B_x} & \frac{\partial H_z}{\partial B_y} & \frac{\partial H_z}{\partial B_z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Avec $H_x = v_t B_x$, $H_y = v_t B_y$, $H_z = v_n B_z$. En posant, $\mathbf{B}_t^2 = B_x^2 + B_y^2$ calculons :

- $\frac{\partial H_x}{\partial B_x}$

$$\frac{\partial H_z}{\partial B_z} = \frac{\partial(v_t B_x)}{\partial B_x} = v_t + \frac{\partial v_t}{\partial B_x} B_x = v_t + \frac{\partial v_t}{\partial B_t} \frac{\partial B_t}{\partial B_x} = v_t + 2B_x^2 \frac{\partial v_t}{\partial B_t^2} \quad (10)$$

- $\frac{\partial H_x}{\partial B_y}$

$$\frac{\partial H_x}{\partial B_y} = \frac{\partial(v_t B_x)}{\partial B_y} = v_t \frac{\partial B_x}{\partial B_y} + \frac{\partial v_t}{\partial B_y} B_x = \frac{\partial v_t}{\partial B_t} \frac{\partial B_t}{\partial B_y} B_x = 2B_x B_y \frac{\partial v_t}{\partial B_t^2} \quad (11)$$

De manière similaire on écrit les autres termes du tenseur de réductivité différentielle, qui s'écrira :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}^t} = [\mathbf{v}] + \begin{bmatrix} 2B_x^2 \frac{\partial v_t}{\partial B_t^2} & 2B_x B_y \frac{\partial v_t}{\partial B_t^2} & 2B_x B_z \frac{\partial v_t}{\partial B_n^2} \\ 2B_x B_y \frac{\partial v_t}{\partial B_t^2} & 2B_y^2 \frac{\partial v_t}{\partial B_t^2} & 2B_x B_y \frac{\partial v_t}{\partial B_n^2} \\ 2B_x B_y \frac{\partial v_n}{\partial B_t^2} & 2B_x B_y \frac{\partial v_n}{\partial B_t^2} & 2B_z^2 \frac{\partial v_n}{\partial B_n^2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

avec

$$[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_t & 0 & 0 \\ 0 & v_t & 0 \\ 0 & 0 & v_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

tenseur diagonal qui permet de caractériser les matériaux linéaires isotropes.

Pour entièrement déterminer le tenseur (12), il est impératif de définir les dérivées $\frac{\partial v_t}{\partial B_t^2}$, $\frac{\partial v_t}{\partial B_n^2}$, $\frac{\partial v_n}{\partial B_t^2}$.

v_n et v_t sont les réductivités normale et tangentielle qui définissent le tenseur de réductivité différentielle du matériau homogène. Du fait de la non linéarité du matériau, ces réductivités, sont fonction de la réductivité apparente v_f de la tôle qui elle-même dépend du module de l'induction dans cette tôle qu'on appellera ici $\|\mathbf{B}_f\|$. On

écrit donc $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_f(\|\mathbf{B}_f\|)$ avec $\|\mathbf{B}_f\| = \sqrt{B_{ft}^2 + B_{fn}^2}$ tout en rappelant que $\mathbf{v}_f = \frac{\|\mathbf{H}_f\|}{\|\mathbf{B}_f\|}$. Ce qui permet de calculer la quantité

$$\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial \|\mathbf{B}_f\|} = \frac{1}{2\|\mathbf{B}_f\|^2} \left(\frac{\partial \|\mathbf{H}_f\|}{\partial \|\mathbf{B}_f\|} \|\mathbf{B}_f\| - \|\mathbf{H}_f\| \right) = \frac{1}{\partial \|\mathbf{B}_f\|} \left(\frac{\partial \|\mathbf{H}_f\|}{\partial \|\mathbf{B}_f\|} - \frac{\|\mathbf{H}_f\|}{\|\mathbf{B}_f\|} \right) \quad (14)$$

qui sera utile plus tard dans les calculs.

Etablissons le lien entre les champs homogénéisés et les champs réels de la tôle.

Soient $\mathbf{B}_f \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{B}_{ft} \\ \mathbf{B}_{fn} \end{smallmatrix} \right)$ l'induction dans une tôle du bloc réel, et $\mathbf{B}_f \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{B}_t \\ \mathbf{B}_n \end{smallmatrix} \right)$ l'induction dans le bloc homogène équivalent au bloc réel de tôles. Les conditions de passage (cf. I.1.1.) énoncent la conservation de la composante normale de l'induction et celle de la composante tangentielle du champ magnétique I.(11) & I.(9). Ce qui se traduit par les équations :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{fn} &= \mathbf{B}_n \\ \mathbf{H}_{ft} &= \mathbf{H}_t \end{aligned} \quad (15)$$

où \mathbf{H}_{ft} et \mathbf{H}_t sont les champs magnétiques tangentiels dans la tôle et dans le matériau homogène.

Or le champ magnétique tangentiel dans le matériau homogène est défini tel que: $\mathbf{H}_t = \mathbf{v}_t \mathbf{B}_t$. De manière similaire, puisque la tôle présente une réductivité isotrope on écrit : $\mathbf{H}_{ft} = \mathbf{v}_f \mathbf{B}_{ft}$. Il est donc possible de lier l'induction dans la tôle à l'induction dans le bloc homogène équivalent par la relation :

$$\|\mathbf{B}_f\| = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{v}_t}{\mathbf{v}_f} \right)^2 B_t^2 + B_n^2} \quad (16)$$

ou encore

$$\|\mathbf{B}_f\| = \sqrt{Q^2 B_t^2 + B_n^2} \quad (17)$$

avec

$$Q = \frac{\mathbf{v}_t}{\mathbf{v}_f} = \frac{\mathbf{v}_0}{(1 - \lambda)\mathbf{v}_f + \lambda\mathbf{v}_0} \quad (18)$$

ν_0 réductivité du vide, λ coefficient de foisonnement.

Riches de toutes ces égalités, détaillons le calcul des dérivées des termes du tenseur de réductivité différentielle.

Comme calcul préliminaire on établit :

$$\frac{\partial \|B_f\|}{\partial B_t^2} = \frac{1}{2\|B_f\|} \left(\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} + Q^2 \right) \quad (19)$$

Calculons maintenant

- $\frac{\partial v_t}{\partial B_t^2}$

$$\frac{\partial v_t}{\partial B_t^2} = \frac{\partial v_t}{\partial \|B_f\|} \frac{\partial \|B_f\|}{\partial B_t^2} = \frac{\partial v_t}{\partial \|B_f\|} \frac{1}{2\|B_f\|} \left(\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} + Q^2 \right) \quad (20)$$

Détaillons le calcul de $\frac{\partial v_t}{\partial \|B_f\|}$

- $\frac{\partial v_t}{\partial \|B_f\|}$

$$\frac{\partial v_t}{\partial \|B_f\|} = \frac{\frac{\partial v_f}{\partial \|B_f\|} [v_0[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0] - v_0 v_f(1-\lambda)]}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^2}$$

$$\frac{\partial v_t}{\partial \|B_f\|} = \frac{\lambda v_0^2}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^2} \frac{\partial v_f}{\partial \|B_f\|} \quad (21)$$

Remplaçons maintenant dans (20) : calcul de $\frac{\partial v_t}{\partial B_t^2}$

$$\frac{\partial v_t}{\partial B_t^2} = \frac{\lambda v_0^2}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^2} \frac{\partial v_f}{\partial \|B_f\|} \frac{1}{2\|B_f\|} \left(\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} + Q^2 \right) \quad (22)$$

Or

- $\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2}$

$$\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} = \frac{-2v_0^2}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^3} (1-\lambda) \frac{\partial v_f}{\partial B_t^2} = \frac{-2v_0^2}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^3} (1-\lambda) \frac{\partial v_f}{\partial \|B_f\|} \frac{\partial \|B_f\|}{\partial B_t^2} \quad (23)$$

en remplaçant par l'expression obtenue (19)

$$\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} = \frac{-2v_0^2}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^3} \frac{\partial v_f}{\partial \|B_f\|} \left[\frac{1}{2\|B_f\|} \left(\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} B_t^2 + Q^2 \right) \right] \quad (24)$$

on déduit :

$$\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} = Y \left(\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} B_t^2 + Q^2 \right) \quad (25)$$

avec

$$Y = C \frac{v_0^2(1-\lambda)}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^3} \quad (26)$$

$$C = \frac{1}{\|B_f\|} \frac{\partial v_f}{\partial \|B_f\|} \quad (27)$$

et donc

$$\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} = \frac{CQ^2 v_0^2(1-\lambda)}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^3 - CB_t^2 v_0^2(1-\lambda)} \quad (28)$$

En conséquence, il est possible en remplaçant (23),(21),(19),(18) dans (20) d'établir une expression finale

$$\frac{\partial v_t}{\partial B_t^2} = \frac{\lambda C Q^2}{2} \left[\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} B_t^2 + Q^2 \right] \quad (29)$$

Les développements des expressions de $\frac{\partial v_t}{\partial B_n^2}$, $\frac{\partial v_n}{\partial B_t^2}$, $\frac{\partial v_n}{\partial B_n^2}$ découlent des calculs permettant d'obtenir (29). On écrit donc :

- $\frac{\partial v_n}{\partial B_t^2}$

$$\frac{\partial v_n}{\partial B_t^2} = \lambda \frac{\partial v_f}{\partial B_t^2} \quad (30)$$

sachant que $v_n = (1-\lambda)v_0 + \lambda v_f$

$$\frac{\partial v_n}{\partial B_t^2} = \lambda \frac{\partial v_f}{\partial B_t^2} = \lambda \frac{\partial v_f}{\partial \|B_f\|} \frac{\partial \|B_f\|}{\partial B_t^2} \quad (31)$$

qui en reportant (14) et (19) donne :

$$\frac{\partial v_n}{\partial B_t^2} = \frac{\lambda C}{2} \left[\frac{\partial Q^2}{\partial B_t^2} B_t^2 + Q^2 \right] \quad (32)$$

De même en s'inspirant des calculs des développements faits pour le calcul de (20) on établit :

- $\frac{\partial v_t}{\partial B_n^2}$

$$\frac{\partial v_t}{\partial B_n^2} = \frac{\frac{\partial v_f}{\partial B_n^2} [v_0[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0] - v_0 v_f(1-\lambda)]}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^2} = \frac{\lambda v_0^2}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^2} \frac{\partial v_f}{\partial B_n^2} \quad (33)$$

et en développant $\frac{\partial v_f}{\partial B_n^2}$;

$$\circ \quad \frac{\partial v_f}{\partial B_n^2}$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial B_n^2} = \frac{\partial v_f}{\partial \|B_f\|} \frac{\partial \|B_f\|}{\partial B_n^2} = \frac{C}{2} \left[1 + \frac{\partial Q^2}{\partial B_n^2} B_t^2 \right] \quad (34)$$

avec

$$\frac{\partial Q^2}{\partial B_n^2} = \frac{-2v_0^2(1-\lambda)}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^3} \frac{\partial v_f}{\partial B_n^2} \quad (35)$$

On détermine

$$\frac{\partial v_f}{\partial B_n^2} = \frac{C}{2} \left[1 + \frac{\partial Q^2}{\partial B_n^2} B_t^2 \right] \quad (36)$$

ce qui fait

$$\frac{\partial Q^2}{\partial B_n^2} = \frac{Cv_0^2(1-\lambda)}{[(1-\lambda)v_f + \lambda v_0]^3 + CB_t^2 v_0^2(1-\lambda)} \quad (37)$$

d'où l'expression finale

$$\frac{\partial v_t}{\partial B_n^2} = \frac{\lambda C Q^2}{2} \left[\frac{\partial Q^2}{\partial B_n^2} B_t^2 + 1 \right] \quad (38)$$

Aussi de manière similaire, on détermine :

$$\frac{\partial v_n}{\partial B_n^2} = \frac{\lambda C}{2} \left[\frac{\partial Q^2}{\partial B_n^2} B_t^2 + 1 \right] \quad (39)$$

Ces termes du tenseur de réductivité différentielle sont par la suite invoqués dans le calcul du résidu formulation modifiée prenant en compte le coefficient de foisonnement, (cf. **1.1.5.**).

1.2. Formulations

1.2.4. Modification de la formulation 2D

Nous avons par les calculs sur la formulation 2D donné le cas général 2D classique (cf. **I.2.1.**). Or, les hypothèses du 2D imposent que les champs \mathbf{B} et \mathbf{H} soient dans le plan, ce qui entraîne que \mathbf{E} et \mathbf{J} sont dans la troisième direction et donc perpendiculaires au plan de simulation 2D. En conclusion, en formulation 2D classique, il est impossible de

faire un calcul de pertes par courant de Foucault pour un matériau feuilleté du fait de la condition $J_z = 0$ inhérente au feuilletage. Nous passerons outre cette limitation du 2D en modifiant la loi de comportement $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H})$ et en lui incluant le terme représentant les pertes.

Rappels sur la formulation 2D classique

Pour rappel, le résidu classique est donné par l'équation I.(27)

$$R_i = L \int_{\Gamma_\Omega} [\text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \mathbf{H} - w_i \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}] d\Gamma_\Omega = 0$$

Aussi la figure 14 du chapitre 1; I.14 est proposée pour rappel du principe de l'homogénéisation 2D d'un paquet de tôles :

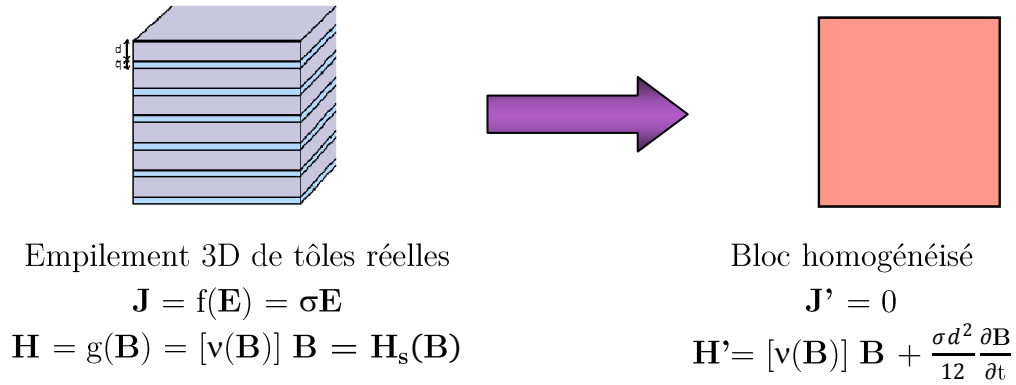


Figure I.14 Rappel du principe de l'homogénéisation 2D

Pour la prise en compte des pertes par courants de Foucault, la loi de comportement est modifiée avec une partie statique et une partie dynamique $\frac{\sigma d^2}{12} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ incluant les pertes.

De ce fait, le nouveau résidu R_i pour la résolution de la formulation 2D, I.(28) homogénéisé s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_i = L \int_{\Gamma_\Omega} [\text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \mathbf{H}' - w_i \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}] d\Gamma_\Omega = 0 \\ \mathbf{H}' = [\nu(\mathbf{B})] \mathbf{B} + \frac{\sigma d^2}{12} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

D'où :

$$R_i = L \int_{\Gamma_\Omega} \left[\text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \mathbf{H}_s(\mathbf{B}) + w_i \frac{\sigma d^2}{12} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - w_i \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \right] d\Gamma_\Omega = 0 \quad (40)$$

Ce résidu dépend d'une dérivée temporelle entraînant la résolution numérique d'équations différentielles. Le schéma d'Euler implicite est utilisé avec une discrétisation temporelle. L'équation à résoudre est donc

$$R_{i,t+\Delta t} = 0$$

avec

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\mathbf{B}_{t+\Delta t} - \mathbf{B}_t}{\Delta t}$$

La méthode de Newton-Raphson sera encore utilisée pour la résolution du système non linéaire cf. Annexes [voir **Newton-Raphson**] avec le terme de matrice tangente obtenue de la même manière.

$$\frac{\partial R_{i,t+\Delta t}}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} = L \int_{\Gamma_\Omega} \left[\text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} \right] d\Gamma_\Omega \quad (41)$$

Or

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} = \frac{\partial \mathbf{H}_s(\mathbf{B}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} + \frac{\sigma d^2}{12} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_{t+\Delta t} \quad (42)$$

avec d'une part

$$\frac{\partial \mathbf{H}_s(\mathbf{B}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} = \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial \mathbf{B}_{t+\Delta t}^t} \frac{\partial \mathbf{B}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{A}_{t+\Delta t}} \quad (43)$$

et d'autre part

$$\frac{\partial \mathbf{H}_s(\mathbf{B}_{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} = \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial \mathbf{B}_{t+\Delta t}^t} \text{rot}_{2D}(w_j) \quad (44)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_{t+\Delta t} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} \left(\frac{\mathbf{B}_{t+\Delta t} - \mathbf{B}_t}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{\text{rot}_{2D}(w_j)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (45)$$

D'où

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{A}_{J_{t+\Delta t}}} = L \int_{\Gamma_\Omega} \left[\text{rot}_{2D}(w_i) \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}_s(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^t} \right)_{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\sigma d^2}{12} \right] \text{rot}_{2D}(w_j) \right] d\Gamma_\Omega = 0 \quad (46)$$

De même que le système résolu dans la formulation classique, on résout en EF:

$$[M][\Delta A] = [Q] \quad (47)$$

avec

$$M_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial A_j} = L \int_{\Gamma_\Omega} \left[\text{rot}_{2D}(w_i) \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}_s(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^t} \right)_{t+\Delta t} + \frac{\sigma_d^2}{12\Delta t} \right] \text{rot}_{2D}(w_j) \right] d\Gamma_\Omega \quad (48)$$

et

$$Q_i = -R_i = -L \int_{\Gamma_\Omega} [\text{rot}_{2D}(w_i) \cdot \mathbf{H} - w_i \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}] d\Gamma_\Omega = 0 \quad (49)$$

1.2.5. Prise en compte de λ dans la formulation 2D modifiée [Faure, 2012]

Pour ce faire, rappelons l'expression de la loi $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ modifiée pour la prise en compte des pertes. \mathbf{H} , dans le matériau homogène est tel que :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \frac{\sigma_d^2}{12} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (50)$$

ou sous une autre forme :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{\text{dyn}} \quad (51)$$

Or \mathbf{H} et \mathbf{H}_s sont des champs à l'échelle d'une tôle de la pile. Ce qui permet d'écrire de manière plus explicite.

$$\mathbf{H}_{||} = \mathbf{H}_{s_l} + \frac{\sigma_d^2}{12} \frac{\partial \mathbf{B}_l}{\partial t} \quad (52)$$

Où, \mathbf{H}_{s_l} , \mathbf{B}_l sont respectivement le champ statique surfacique et l'induction moyenne dans l'empilement «lamination» et $\mathbf{H}_{||}$ le champ homogénéisé dans la direction parallèle au plan de laminage.

Pour prendre en compte le coefficient de foisonnement l'équation précédente doit s'écrire uniquement en fonction de grandeurs homogénéisées. Réécrivons donc \mathbf{H}_{s_l} et \mathbf{B}_l en fonction de $\mathbf{H}_{||}$ et $\mathbf{B}_{||}$. [Gyselinck & Dular, 2004]

$$\mathbf{B}_{||} = (1 - \lambda)\mathbf{B}_0 + \lambda\mathbf{B}_l \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_l = \frac{1}{\lambda}\mathbf{B}_{||} + \frac{(1 - \lambda)}{\lambda}\mathbf{B}_0$$

or $\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{H}_0}{v_0}$; $\mathbf{B}_l = \frac{\mathbf{H}_l}{v_l}$; De plus $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_l = \mathbf{H}_{||}$ (cf. I.(9)). Remplaçons donc \mathbf{B}_l dans l'expression de $\mathbf{H}_{||}$

$$\mathbf{H}_{||} = v_l \left[\frac{1}{\lambda} \mathbf{B}_{||} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \frac{\mathbf{H}_0}{v_0} \right] + \frac{\sigma d^2}{12} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\lambda} \mathbf{B}_{||} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \frac{\mathbf{H}_0}{v_0} \right] \quad (53)$$

soit

$$\left(1 + \frac{(1-\lambda) v_l}{\lambda v_0} \right) \mathbf{H}_{||} + \frac{\sigma d^2 (1-\lambda)}{12 \lambda v_0} \frac{\partial \mathbf{H}_{||}}{\partial t} = \frac{v_l}{\lambda} \mathbf{B}_{||} + \frac{\sigma d^2}{12 \lambda} \frac{\partial \mathbf{B}_{||}}{\partial t}$$

Remarquons que $1 + \frac{(1-\lambda) v_l}{\lambda v_0} = \frac{v_l}{\lambda v_t}$, ce qui donne :

$$\mathbf{H}_{||} + \frac{\sigma d^2 (1-\lambda) v_t}{12 v_0 v_l} \frac{\partial \mathbf{H}_{||}}{\partial t} = v_{||} \mathbf{B}_{||} + \frac{\sigma d^2 v_t}{12 v_l} \frac{\partial \mathbf{B}_{||}}{\partial t}$$

On réécrit cette expression comme suit :

$$\mathbf{H}_{||} = v_t \mathbf{B}_{||} + \frac{\sigma d^2 v_t}{12 v_l} \left(1 - \frac{(1-\lambda) v_t}{v_0} \right) \frac{\partial \mathbf{B}_{||}}{\partial t} \quad (54)$$

Or $1 - \frac{(1-\lambda) v_t}{v_0} \approx 1$, du coup

$$\mathbf{H}_{||} \approx v_t \mathbf{B}_{||} + \frac{\sigma d^2 v_t}{12 v_l} \frac{\partial \mathbf{B}_{||}}{\partial t} \quad (55)$$

Nous pouvons donc définir une conductivité homogénéisée

$$\sigma_t = \frac{v_t}{v_l} \sigma \quad (56)$$

qui rend compte de l'influence du laminage et des couches isolantes sur la conductivité tangentielle du bloc homogénéisé.

Remarque : L'homogénéisation est faite en μ . Les développements sur cette formulation modifiée font apparaître le rapport $\frac{v_t}{v_l} \sigma$ qui est un terme de conductivité homogénéisée.

Une expression similaire est définie cette fois ci pour un **cas 3D**. La conductivité normale

$$\sigma_n = \frac{v_l}{v_t} \sigma \quad (57)$$

permet de complètement définir le tenseur de conductivité homogénéisée pour une simulation 3D. [Gyselinck & Dular, 2004], [Gyselinck, Sabariego & Dular, 2005].

Cette sous-section a permis de prendre en compte la proportion de tôles dans les empilements via le coefficient de foisonnement. Celui ci permet d'avoir des modèles plus fidèles aux comportements réels. La formulation et les résidus jusque là calculés (40) permettent d'évaluer les pertes dans le cas où le coefficient de foisonnement est égal à 1. De l'ordre de 0,98 dans la réalité, le coefficient de foisonnement est souvent assimilé à 1. Aussi, pour être plus généralement applicable avec une meilleure précision de modélisation, la valeur réelle de ce coefficient de foisonnement devra être intégrée à la formulation 2D modifiée qui calcule les pertes, ce que nous ferons ici.

Le coefficient de foisonnement et les matrices de réductivité y afférant étant introduits, remplaçons-les dans le résidu (47). On trouve donc :

$$M_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial A_j} = L \int_{\Gamma_\Omega} \left[\text{rot}_{2D}(w_i) \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}_{||}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}_{||}^t} \right)_{t+\Delta t} + \frac{\sigma_t d^2}{12 \Delta t} \right] \text{rot}_{2D}(w_j) \right] d\Gamma_\Omega \quad (58)$$

en notant que le terme $\frac{\partial \mathbf{H}_{||}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}_{||}^t}$ est celui développé en **1.1.3**.

Nous avons dans cette partie une homogénéisation 2D, défini un modèle homogénéisé qui permet le calcul de pertes 2D. Ce modèle consiste en une modification de la loi $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ de la formulation 2D standard par une loi $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ modifiée prenant en compte les pertes et la spécificité du matériau feuilleté (par le coefficient de foisonnement). Aussi cette formulation permettra de définir dans le logiciel EF un nouveau type de matériau (virtuel) : matériaux feuilletés.

2. Validation 2D transitoire

2.1. Cas d'un matériau Non Linéaire

2.1.1. Le modèle 2D homogénéisé dans le logiciel EF

Pour mieux appréhender le synoptique de l'algorithme utilisé pour calculer les pertes dans les matériaux feuilletés non linéaires, rappelons les termes modifiés dans la formulation 2D classique. La loi de comportement $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ dans la formulation classique est remplacée dans le matériau homogène telle que l'exprime l'équation (54) [Meunier, 2008], [Gyselinck & Dular, 2004], [Gyselinck, 1999], [Gyselinck, Sabariego & Dular, 2005] :

Le calcul des composantes dynamiques des équations et des différents éléments du tenseur de réductivité différentielle est réalisé par des sous programmes. Deux principaux programmes intervenant dans le calcul de pertes dans le cas non linéaire sont présentés ci-après.

- Calcul des composantes statiques non linéaires

$$\left(\mathbf{H}_s ; \frac{d\mathbf{H}_s}{d\mathbf{B}} \right)_{NL}$$

Il permet à partir d'un champ magnétique imposé (par une bobine dans notre cas) de déterminer le champ magnétique à l'intérieur du matériau homogène et le tenseur de réductivité différentielle de celui-ci. Il détermine ainsi la composante statique du champ global de même que la partie statique du tenseur de réductivité différentielle. Il permet à partir du champ sur l'empilement global de déterminer le champ sur une tôle et de pouvoir homogénéiser à partir de celui-ci.

- Calcul des composantes dynamiques

$$\left(\mathbf{H}_{dyn} ; \frac{d\mathbf{H}_{dyn}}{d\mathbf{B}} \right)$$

Ce programme permet quant à lui de déterminer les composantes dynamiques non prises en compte par un modèle 2D classique. Ces composantes dynamiques sont calculées pour le champ magnétique \mathbf{H}_{dyn} et pour le tenseur de réductivité différentielle $d\mathbf{H}_{dyn}/d\mathbf{B}$.

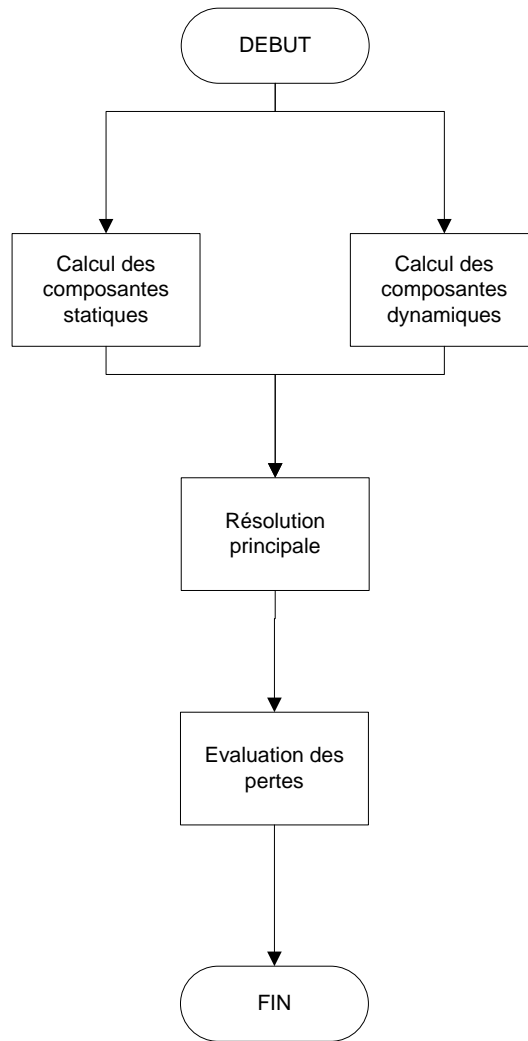


Figure 4 synoptique du programme de modélisation des pertes en 2D NL

2.1.2. Evaluation des pertes en transitoire

Une fois la géométrie du dispositif 2D homogénéisé représentant un empilement de tôle faite, les propriétés physiques sont définies. Les pertes sont directement prises en compte en résolution et sont exploitées après le calcul de l'intégrale suivante :

$$\int_t^{t+T} \mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt$$

où T représente la période d'échantillonnage. \mathbf{H} étant le champ global, somme de la composante statique et de la composante dynamique du champ homogénéisé.

2.1.3. Résultats de validation

L'utilisation de propriétés non linéaires permet de coller un peu plus à des caractéristiques réelles de matériaux magnétiques. Les pertes dans ces matériaux une fois feuilletés peuvent être caractérisées par le modèle 2D développé. Une validation sur un cas-test représentant un circuit magnétique circulaire sera effectuée en ce sens dans la sous-section suivante.

Les matériaux magnétiques non linéaires, sont caractérisés par une courbe d'aimantation $\mathbf{B}(\mathbf{H})$. Cette courbe est définie à partir d'une perméabilité à l'origine (pente à l'origine de la courbe) et d'une induction à saturation. Plusieurs modèles sont développés pour représenter ces courbes d'aimantation, cf. [Guérin, 1994] pour plus de détails. Le modèle utilisé ici est le modèle Arc tangente à deux paramètres. En pratique la courbe est constituée de 3 parties :

- Linéaire
- Coude
- Saturation

Valider le modèle 2D non linéaire homogénéisé, revient à effectuer une validation sur chacune des trois parties de cette courbe. Ces parties sont définies suivant la position sur la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ et donc par le nombre d'ampère-tours imposés par la bobine inductrice. La formule générale du courant à imposer dans les bobines est obtenue à partir d'une loi d'Ampère sur la longueur moyenne du circuit et s'écrit.

$$i = \frac{\widehat{B}}{N} \left[\frac{l - a}{\mu_f} + \frac{a}{\mu_0} \right]$$

où \widehat{B} est la valeur d'induction permettant de se situer sur la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, a : la largeur d'entrefer $l - a$: la longueur moyenne du circuit magnétique. μ_f et μ_0 respectivement la perméabilité magnétique à l'origine du matériau magnétique et la perméabilité du vide et N le nombre de tours.

- **Cas-test**

Afin de valider le modèle, nous choisissons un cas simple faisant abstraction des difficultés introduites par la présence d'entrefer et de singularités dans les coins.

○ Géométrie

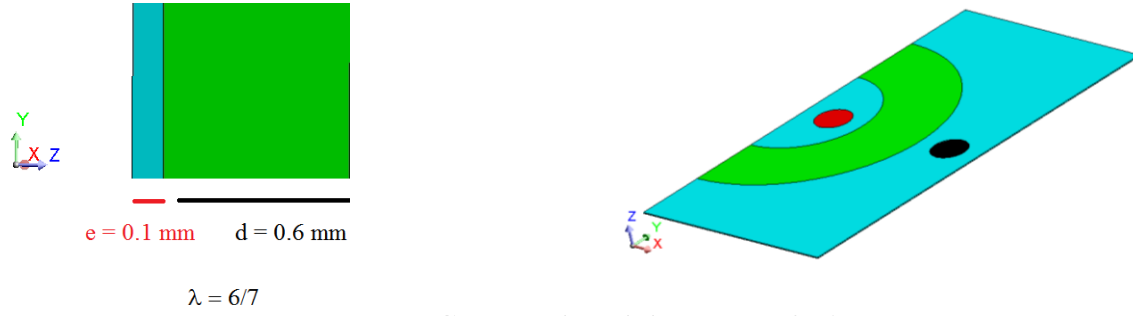


Figure 5 Cas test de validation non linéaire

La figure 5 présente le cas de référence 3D composé d'une tôle et d'une couche isolante qui est en fait une cellule élémentaire d'empilement.

Ce cas de référence est comparé à un cas homogénéisé 2D qui est une section XOY du cas de référence. La longueur moyenne du circuit est de 78 mm pour 20mm de largeur. En sus, ce circuit ne présente que la moitié du circuit total (symétrie suivant le plan YOZ). Sur les bords extérieurs sont définies des conditions aux limites $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0$ caractérisant un champ tangent.

○ Maillage

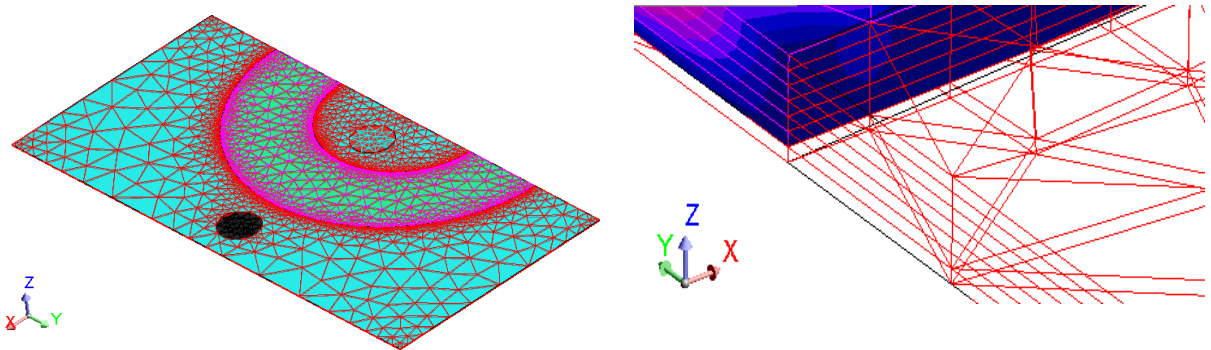


Figure 6 Maillage du cas de référence non linéaire

Une étude de sensibilité au maillage est faite pour toutes les validations. Le maillage retenu étant celui pour lequel la variation des résultats d'une résolution à une autre est de l'ordre 10^{-4} en partant du maillage théorique requis (trois éléments par épaisseur de peau).

Le cas de référence et le modèle homogénéisé comportent la même discrétisation surfacique; le maillage du cas de référence étant une extrusion de ce maillage surfacique. Le nombre d'éléments sur l'épaisseur est régi par la règle classique consistant à avoir au moins deux éléments finis par épaisseur de peau (cf. figure 6) et tableau 1.

	Cas de référence	Modèle 2D
Nombre d'éléments	37065	8246
Temps de calcul (s) Core i5 2,67GHz, 4 coeurs	63662	1228

Tableau.1 – Maillage et performances de calcul sur la partie linéaire de la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$

○ Propriétés physiques

Propriétés	Cas de référence 3D	Bloc Homo 2D
$\mu_{r-initial}$	1000	1000
<i>saturation</i>	1,2T	1,2T
$\rho \ \Omega.m$	0,45E-6	0,0
Epaisseur de tôle (mm)	0,6	Profondeur du domaine 0,7
Epaisseur d'isolant (mm)	0,1	

Tableau.2 – caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène

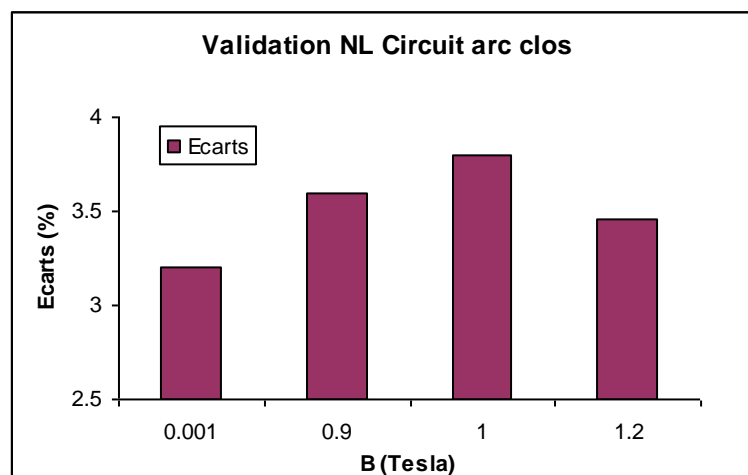
Les propriétés physiques des tôles et du modèle homogénéisés sont décrites dans le tableau 2. Le modèle de courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ est le modèle arc-tangente avec une perméabilité à l'origine de 1000 et une induction à saturation de 1,2T.

○ Résultats de validation

Les valeurs d'induction choisies correspondant aux différentes parties de la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ sont les suivantes :

- Linéaire : $B = 0,001T$
- Coude : $B = 0,9T$
- Saturation : $B = 1,2T$

Un point de calcul supplémentaire est ajouté à $B = 1T$ pour vérifier le résultat obtenu sur le coude (cf. figure 7)



2.1.4. Conclusions

Un modèle 2D homogénéisé de tôles est développé et validé par les résultats en figure 7 avec un maximum d'erreur sur le coude à 3,8%. Le système converge au bout de 3 itérations Newton Raphson, ce nombre passe à 5 aux valeurs de passage par zéro de l'induction. La figure 8 montre les iso valeurs de l'induction sur le cas homogénéisé.

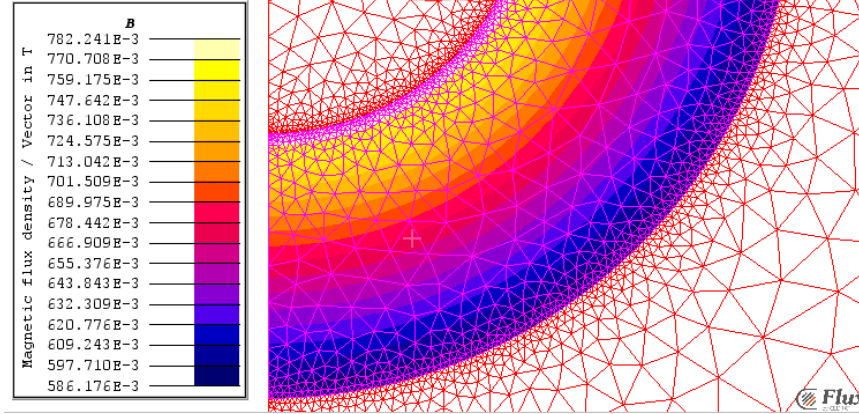


Figure 8 Iso valeurs de B sur le coude ($B = 0.9T$) sur une partie du modèle 2D homogène

2.2. Cas d'un matériau linéaire

Le cas de la modélisation de matériau linéaire peut être considéré comme un cas particulier du non linéaire et cible très peu de matériaux réels. En pratique il simplifie la formulation modifiée obtenue dans la sous-section précédente.

En effet la loi de comportement liant le champ magnétique à l'induction définit généralement :

$$\mathbf{H} = [\mathbf{v}(\mathbf{B})]\mathbf{B} \quad (59)$$

Le cas linéaire est régi par une relation $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ statique, $\mathbf{H} = [\mathbf{v}]\mathbf{B}$. Dans notre modèle $[\mathbf{v}]$ est un tenseur diagonal de perméabilité anisotrope défini dans [Urma, 2000] et établi en (13) comme suit :

$$[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_{||} & 0 & 0 \\ 0 & v_{||} & 0 \\ 0 & 0 & v_{\perp} \end{bmatrix}$$

Tout comme le cas non-linéaire, le cas linéaire fait l'objet d'une validation.

Hormis le cas-test et les propriétés physiques, l'ensemble de la procédure de validation reste le même que pour le cas non linéaire ainsi que la méthode d'évaluation des pertes par intégration (cf. 2.1.2.).

2.2.5. Résultats de validation

- Cas-test
 - Géométrie

Le cas-test de validation représente le dispositif 3D en figure 9 : une cellule d'empilement réel. Il est composé d'une tôle accolée à un isolant, avec comme inducteur une bobine dont les sections sont disposées de part et d'autre du circuit magnétique. Les plans YOZ et XOY sont des plans de symétrie du système.

Ce dispositif est modélisé par une structure 2D homogénéisée, section plane de la structure de référence, comportant un matériau homogénéisé, avec une profondeur de domaine égale à l'épaisseur du dispositif de référence (1 tôle + isolant).

La largeur du circuit est de 30mm pour une longueur moyenne de 110 mm, et à un entrefer de 20mm

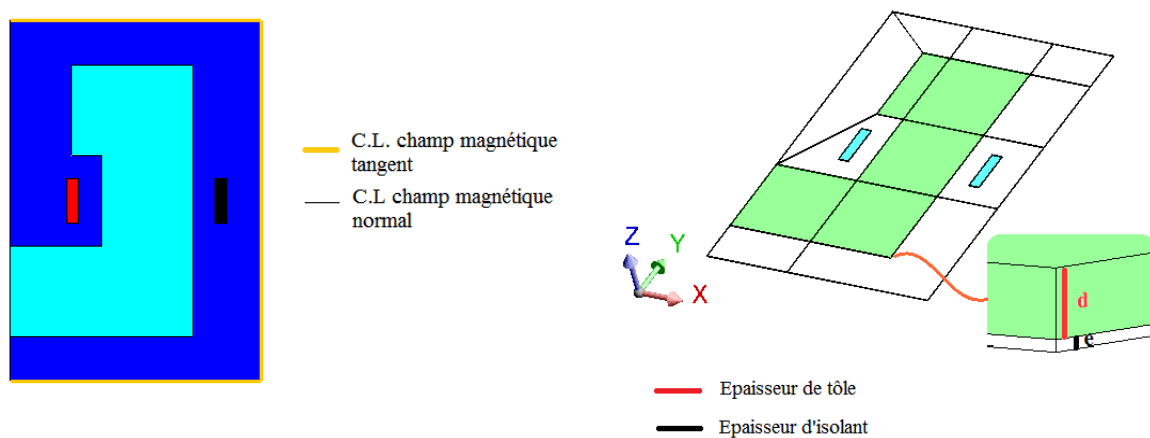


Figure 9 Validation du modèle 2D linéaire ; Cas-test homogénéisé (gauche) cas réel comportant une tôle et un isolant (droit)

- Maillage

Le cas de référence et le modèle 2D disposent du même maillage surfacique, raffiné aux coins pour éviter les imprécisions dues aux singularités.

Sur le cas de référence, le maillage est fait de sorte qu'on ait au moins 2 éléments dans l'épaisseur de peau. Les maillages sont faits de manière à couvrir la plus haute fréquence de calcul et reste donc valide pour des simulations à de plus faibles fréquences.

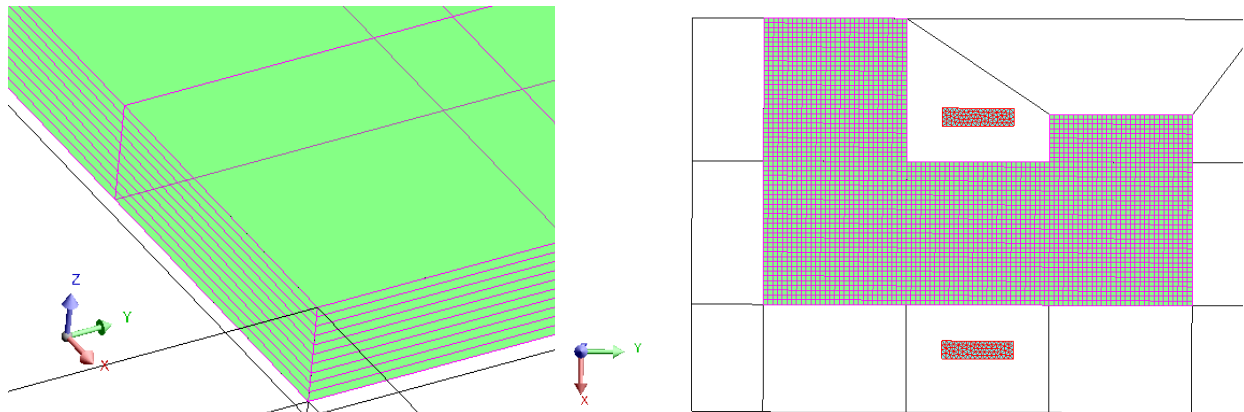


Figure 10 Maillage sur le cas de référence linéaire

Les deux dispositifs sont résolus à $f = 50\text{Hz}$. Ces simulations sont faites pour un matériau dont les caractéristiques sont données dans le Tableau.3.

Propriétés	Cas de référence	Bloc Homo
μ_r	300	$\langle \mu_{eq} \rangle$
ρ $\Omega.m$	0,45E-6	0,0
Epaisseur de tôle (mm)	0,6	Profondeur du domaine 0,7
Epaisseur d'isolant (mm)	0,1	

Tableau.3 – caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène

	Cas de référence	Cas homogénéisé
Pertes à 50 Hz (W)	0,040586	0,041431
Erreur de modélisation %	2	

Tableau.4 – résultats de validation linéaire à 50Hz

2.2.6. Conclusions

Le tableau.4 montre la qualité des résultats obtenus sur le cas linéaire avec une erreur de 2% à 50Hz. Notons que cette différence est obtenue en comparaison avec un modèle 3D comportant cinq fois plus d'éléments. Le tableau 5 donne une vue non exhaustive sur les performances de calcul.

	Cas de référence 3D	Modèle 2D
Nombre d'éléments	31485	2368
Temps de calcul (s) Core i5 2,67GHz, 4 cœurs	63662	121

Tableau.5 – Maillage et performances de calcul

Les modèles HF viennent en complément des modèles BF pour un plus grand spectre d'application aux dispositifs électromagnétiques. En effet pour la plupart des moteurs, et des transformateurs, un modèle BF suffit à quantifier le gros des pertes. Cependant pour le cas des moteurs électriques, du fait des parties en rotation- les dents peuvent « voir » des fréquences très élevées- d'où la nécessité de développer des modèles HF (relativement à la présence d'effet de peau).

Des modèles temporels sont exposés dans [Gyselinck & Dular, 2004] sont basés sur une décomposition en série de Taylor de l'induction; Le modèle BF présenté constitue un développement au premier ordre des solutions exposées en **3**. Aussi, faire des développements à l'ordre supérieur nécessite plusieurs inconnues aux nœuds du maillage Élément Fini (EF), d'où une complexité accrue dans la mise en œuvre de tels modèles.

Ces modèles ne feront pas l'objet d'études plus exhaustives dans ce manuscrit.

Le fait de n'avoir pas traité les modèles non linéaires est un choix imposé par Cedrat, les modèles de matériaux harmoniques non linéaires existant déjà sous Flux un couplage des méthodes sera fait plus tard par leurs développeurs.

Toutefois nous nous intéressons au cas particulier des régions harmoniques (modèles linéaires isotropes sans mouvement) où l'étude peut être conduite en HF par l'intermédiaire de propriétés physiques complexes fonction de la fréquence.

Toujours en notant que par HF nous entendons des fréquences pour lesquelles l'épaisseur de peau est faible devant l'épaisseur de tôle. Il ne s'agit nullement de prendre en considération des courants de déplacement.

3. Modèles en harmonique hautes fréquences (HF)

Ils sont représentés par un modèle analytique et un modèle numérique. Le modèle analytique intègre une perméabilité équivalente obtenue par les équations données en **3.1.** et les notions sur la réductivité homogénéisée résumés par (13); Le modèle numérique passe lui par une résolution locale des équation de Maxwell sur une cellule élémentaire judicieusement choisie pour pouvoir être représentative de l'empilement complet.

Les équations du modèle analytique harmonique HF sont développées dans cette première sous-section (3.1.), pour plus de clarté.

3.1. Modèle analytique

3.1.1. Equations générales

Elles sont une application des résolutions des équations de Maxwell comme celles permettant d'obtenir I.(59), sauf que cette fois-ci, aucune hypothèse ne sera faite sur l'homogénéité du champ dans la tôle (plus d'hypothèse BF).

○ Modèle HF en G [Krähenbühl, 2004]

Soit une tôle (cf. figure I.10), soumise à un champ tangent suivant une direction x ; la tôle est supposée infiniment longue dans les directions x et y .

Réolvons sur cette tôle les équations I.(1) et I.(2) tout en considérant les lois de comportement $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ et $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, le matériau étant supposé linéaire et isotrope. Il vient que :

$$\text{rot}[\text{rot}(\mathbf{H})] = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (60)$$

Et comme $\text{rot}[\text{rot}(\mathbf{H})] = \text{grad}[\text{div}(\mathbf{H})] - \Delta\mathbf{H}$

L'expression (59) devient, avec un champ \mathbf{H} sinusoïdal et considérant I.(4)

$$\Delta\mathbf{H} = j\omega\mu\sigma\mathbf{H} \quad (61)$$

Sachant que $\mathbf{H} = H_m e^{j\omega t} \mathbf{u}_x$, avec \mathbf{u}_x le vecteur unitaire suivant x . Du fait que la tôle est infinie suivant les directions x et y , les variations dans ces directions sont négligées, et (60) devient :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_x}{\partial^2 z} = j\omega\mu\sigma H_m \mathbf{u}_x \quad (62)$$

Cette équation différentielle du second ordre a une solution générale de la forme

$$\mathbf{H}_x = (C_1 e^{qz} + C_2 e^{-qz}) e^{j\omega t} \quad (63)$$

avec $q^2 = j\omega\mu\sigma$

Puisque la tôle est centrée entre $d/2$ et $-d/2$ et pour des raisons de symétries

$H_x(z) = H_x(-z)$, ce qui entraîne que $C_1 = C_2 = C$. Alors :

$$\mathbf{H}_x = (e^{qz} + e^{-qz})C e^{j\omega t} \quad (64)$$

Appliquons (64) aux extrémités $z = d/2$ et $z = -d/2$, il sort directement :

$$C = \frac{H_{ms}}{e^{qd/2} + e^{-qd/2}} \quad (65)$$

avec

$$H_{ms} = \frac{H_{s1} + H_{s2}}{2}$$

où H_{ms} est la moyenne des champs surfaciques de la tôle entre $z = d/2$ et $z = -d/2$.

Donc le champ \mathbf{H}_x s'écrit :

$$\mathbf{H}_x = \frac{e^{qz} + e^{-qz}}{e^{qd/2} + e^{-qd/2}} H_{ms} e^{j\omega t} \mathbf{u}_x \quad (66)$$

L'induction moyenne est obtenue par une intégrale sur l'épaisseur de la tôle :

$$B_{moy} = \frac{\mu}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{H}_x dz = \frac{2\mu}{qd} \frac{e^{qz} + e^{-qz}}{e^{qd/2} + e^{-qd/2}} H_{ms} e^{j\omega t} \quad (67)$$

qui peut se réécrire :

$$B_{moy} = \frac{\tanh qd/2}{qd/2} \mu H_{ms} e^{j\omega t} \quad (68)$$

En remplaçant $qd/2$ par $(1+j)\frac{d}{2\delta}$, une nouvelle quantité est définie [Gyselinck & Dular, 2004]

$$\frac{B_{moy}}{H_{ms}} = \mu \frac{\tanh qd/2}{qd/2} \quad (69)$$

qui n'est autre que la perméabilité équivalente complexe qui exprime le champ surfacique moyen en fonction de l'induction moyenne [Krähenbühl, 2004].

$$\mu^* = G \mu \quad (70)$$

avec G définie par [Krähenbühl, 2004]:

$$G = \frac{\tanh (1+j)d/2\delta}{(1+j)d/2\delta} \quad (71)$$

En première approximation basse fréquence le modèle en G équivaut au modèle BF; en $\sigma \frac{d^2}{12}$. Une confirmation de cette concordance à basse fréquence est donnée par la

comparaison des parties réelle et imaginaire des perméabilités complexes obtenues à partir des deux méthodes analytiques explicitées ci-dessus.

La perméabilité équivalente définie en (70) est comparée à celle exprimée par le modèle BF :

$$\mu^* = \mu + jw\sigma \frac{d^2 dB}{12dt} \quad (72)$$

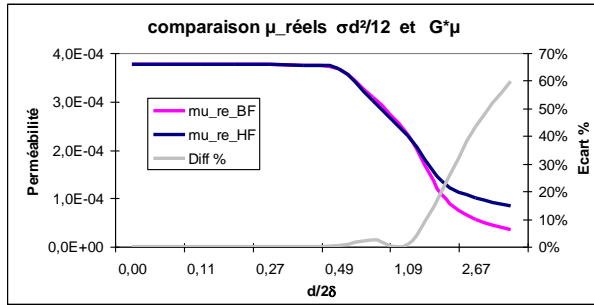


Figure 11 Comparaison des perméabilités réelles

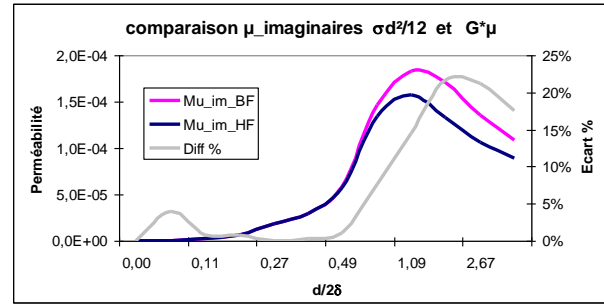


Figure 12 Comparaison des perméabilités imaginaires

On conclut que pour des applications BF, le modèle en $\sigma \frac{d^2}{12}$ peut être utilisé avec autant de précision que le modèle général en $G.\mu$. Il nécessite une très simple implémentation et offre la possibilité de définir toutes les entités du modèle par des paramètres d'entrée/sortie. (Pas besoin de développements spécifiques).

Par contre, du fait de la montée en fréquence, l'épaisseur de peau diminue. Ceci se traduit par une augmentation de la valeur du ratio $\frac{d}{2\delta}$ qui traduit une épaisseur de peau plus faible que l'épaisseur de tôle. Du coup le modèle BF en G est la solution générale apte à fournir de bons résultats.

Afin d'avoir un modèle valide quelle que soit la fréquence (sous entendu pour une application de l'électrotechnique classique où le rapport $d/2\delta$ n'atteint que rarement la valeur 3), nous utiliserons le modèle en G dans la suite.

3.1.2. Prise en compte du coefficient de foisonnement

L'idée de trouver un paramètre équivalent en μ vient du fait que les courants de Foucault dans l'épaisseur de la tôle peuvent s'interpréter comme des moments magnétiques. Il devient possible d'assimiler ces pertes à une propriété magnétique complexe, dont la variation suit celle de la fréquence d'excitation.

Les équations générales nous livrent une perméabilité équivalente $\mu^* = G \mu$ cf. (69), sauf que celle-ci ne prend en compte que le calcul sur une seule tôle. Une homogénéisation géométrique est donc faite en prenant en compte le coefficient de foisonnement.

Notons comme en 1.1.1. que ce qui permet à partir de calculs sur une tôle, de pouvoir généraliser à tout l'empilement, est le coefficient de foisonnement. Celui-ci, est le pourcentage de matériau magnétique dans tout l'empilement (1).

Nous considérons par la suite, les principes des équations (5) et (8) déjà posés et assimilés.

On définit un tenseur de réluctivité différentielle général (pour le 3D) en (73), le tenseur 2D se résume à une matrice diagonale 2x2, sous matrice de (73), ne contenant pas de terme orthogonal.

$$\mathbf{v}_{eq} = \begin{bmatrix} v_{||} & 0 & 0 \\ 0 & v_{||} & 0 \\ 0 & 0 & v_{\perp} \end{bmatrix} \quad (73)$$

En conclusion des paragraphes précédents, nous devons retenir deux expressions du μ^* :

- ✓ Une première obtenue avec des hypothèses basses fréquences très commode d'utilisation en $\sigma \frac{d^2}{12}$.
- ✓ Une seconde défini par $\mu^* = G \mu$ dont l'utilisation nécessite l'évaluation de la fonction G à chaque fréquence.

3.2. Modèle numérique [Meunier, 2010], [El Feddi, 1997]

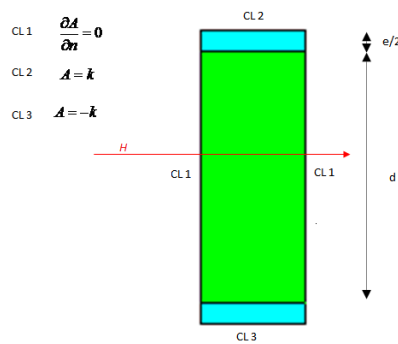


Figure 14 Cellule élémentaire

Parallèlement au modèle analytique, un modèle numérique a été développé et peut servir à valider les solutions analytiques. L'approche numérique considère une cellule élémentaire périodique, représentative du paquet de tôles. Elle est composée d'une tôle en matériau isotrope et de deux demi-couches d'isolant situées de part et d'autre de la tôle.

Sur cette cellule élémentaire, nous imposons des conditions aux limites adéquates sur le potentiel vecteur magnétique afin d'imposer le champ. Après simulations, la perméabilité et la conductivité équivalentes sont déterminées à l'aide des calculs faits au paragraphe suivant.

Pour les calculs, une différence est faite entre l'échelle locale et une échelle globale macroscopique. A l'échelle locale, les équations de Maxwell sont vérifiées mais les valeurs de champ sont inaccessibles par l'expérimentation. Par ailleurs, à l'échelle globale (macroscopique) qui représente l'échelle du dispositif, les quantités sont cette fois ci mesurables (les équations de Maxwell sont aussi vérifiées).

Soient $\mathbf{b}, \mathbf{h}, \mathbf{e}, \mathbf{j}$ grandeurs locales, $\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{E}, \mathbf{J}$ grandeurs globales.

Les équations de Maxwell (I.1-4) sont vérifiées pour des grandeurs locales de champs.

On définit $\mathbf{b}_\mu, \mathbf{h}_\mu, \mathbf{e}_\mu, \mathbf{j}_\mu$, variations à l'échelle microscopique des champs correspondants.

Intéressons-nous au passage des entités locales aux entités globales. Ce passage de l'échelle locale à l'échelle globale se fait par le biais d'une moyenne sur le volume.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b} = \mathbf{B} + \mathbf{b}_\mu \\ \mathbf{h} = \mathbf{H} + \mathbf{h}_\mu \\ \mathbf{e} = \mathbf{E} + \mathbf{e}_\mu \\ \mathbf{j} = \mathbf{J} + \mathbf{j}_\mu \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{B} \\ \langle \mathbf{h} \rangle = \mathbf{H} + \mathbf{h}_\mu \\ \langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E} + \mathbf{e}_\mu \\ \langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{J} \end{array} \right. \quad (74)$$

Les champs locaux sont sommes de champs macroscopiques et de petites variations à l'échelle locale. Par exemple, le champ magnétique \mathbf{h} , est une somme du champ global \mathbf{H} et d'une variation \mathbf{h}_μ pouvant être interprétée comme un champ de variation local dû par exemple à des courants de Foucault locaux.

L'induction globale est une moyenne de l'induction locale et de même pour la densité de courant. Cependant, tel n'est pas le cas pour le champ magnétique ou le champ électrique. En effet même si $\langle \mathbf{j}_\mu \rangle = 0$ ces courants produisent un champ de réaction \mathbf{h}_μ non nul qui s'oppose à \mathbf{h} . Donc le \mathbf{H} est un champ consolidé, macroscopique mesurable. Il résulte simultanément de la moyenne du champ local imposé et du champ de réaction, [Meunier, 2010].

L'étape suivante détaille le calcul des caractéristiques macroscopiques équivalentes (μ^*, σ^*) qui serviront à la modélisation. Ces propriétés équivalentes sont obtenues en déterminant les densités de puissance locale et globale.

La densité de puissance locale est donnée par :

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{e} \mathbf{j}^* d\Omega + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{h}^* d\Omega \quad (75)$$

et la densité de puissance globale par :

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{E} \mathbf{J}^* d\Omega + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{H}^* d\Omega \quad (76)$$

Dans [El Feddi, 1997], les auteurs montrent que les lois (électrique et magnétique) sont découplées dans une cellule centro-symétrique. Avoir les caractéristiques magnétiques équivalentes revient à découpler les lois électriques et magnétiques afin de les identifier d'une échelle à une autre. Donc pour déterminer les propriétés magnétiques, un champ moyen \mathbf{B} est imposé de même qu'un courant global nul sur la cellule $\mathbf{J} = \int \mathbf{j} d\Omega = 0$. Il s'en suit en posant $\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{B}} = (\mathbf{v}_{\text{Re}} + j\mathbf{v}_{\text{Im}})$ (cf. I.4.2.2.1.) que :

$$\mathbf{v}_{\text{Re}} = \frac{1}{\Omega} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{h}^*}{\mathbf{B} \mathbf{B}^*} ; \quad \mathbf{v}_{\text{Im}} = \frac{1}{\Omega} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{e} \mathbf{j}^*}{\omega \mathbf{B} \mathbf{B}^*} \quad (77)$$

De même en imposant \mathbf{B} et un courant moyen \mathbf{J} on trouve les expressions des conductivités équivalentes. Soit donc

$$\rho_{\text{Re}} = \frac{1}{\Omega} \frac{\int_{\Omega_{\text{cond}}} \mathbf{e} \mathbf{j}^*}{\mathbf{J} \mathbf{J}^*} ; \quad \rho_{\text{Im}} = \frac{1}{\Omega} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{h}^*}{\omega \mathbf{J} \mathbf{J}^*} \quad (78)$$

Ω et Ω_{cond} étant respectivement le volume global et le volume conducteur de la cellule.

Ces valeurs calculées permettent de définir une perméabilité et une conductivité équivalentes qui dans le paragraphe suivant sont comparées à celles obtenues avec le modèle analytique.

3.3. Comparaison des deux modèles

Ici, une comparaison entre les modèles analytique et numérique est faite. Elle permet de confirmer les résultats obtenus par les deux méthodes.

Dans le cas analytique, les valeurs sont obtenues en évaluant les expressions G_{μ} et G_{σ} à chaque fréquence correspondant à des valeurs différentes du rapport $d/2\delta$.

- **Comparaison des caractéristiques équivalentes μ^* et σ^*** (avec prise en compte du coefficient de foisonnement)

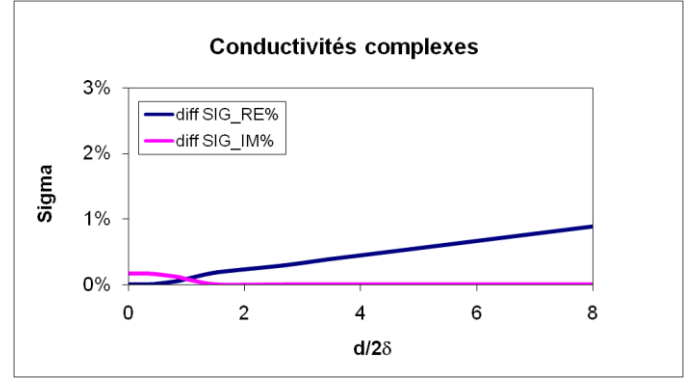
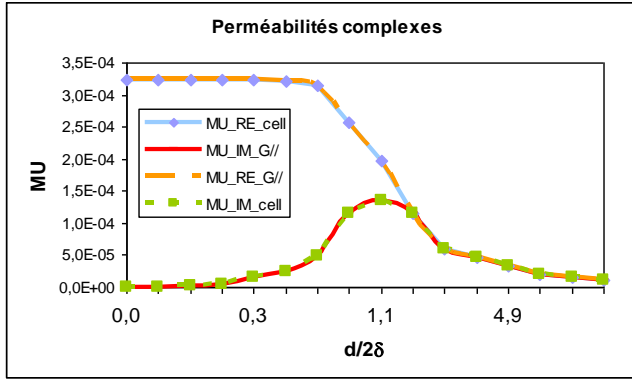


Figure 15 Validation des perméabilité et conductivité du modèle analytique

La figure 15 montre que le modèle numérique, confirme les résultats obtenus par le calcul analytique. Le modèle numérique nécessitant un pré-calcul des caractéristiques physiques équivalentes, le modèle analytique sera préféré. Il pourra notamment servir de modèle de pertes 2D, le champ et l'induction étant confinés dans le plan de la tôle.

Nous avons par ailleurs réalisé une comparaison des courbes de conductivités homogénéisées. On note la même qualité de résultats que pour les perméabilités cf. figure15 (droite) où l'on montre les différences observées entre les conductivités réelles et imaginaires obtenues par les deux modèles analytique et numérique.

4. Validation 2D harmonique

4.1. Evaluation des pertes en harmonique

Les pertes que calculent les modèles présentés sont des pertes a priori. Elles sont en effet prises en compte directement pendant la phase de résolution, offrant ainsi l'avantage de rendre compte fidèlement de l'évolution du champ et de son influence dans les calculs. La quantification des pertes est faite selon l'expression :

$$\text{Re} \left(j\omega \int_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{H}^* d\Omega \right)$$

4.2. Résultats de validation

Cette section présente une validation sur le cas-test présenté en 2.2. Le maillage reste inchangé. Les propriétés physiques sont données par le tableau 6.

Ce cas compare un modèle homogénéisé 2D résolu en transitoire, au cas de référence comprenant une tôle et une couche isolante lui-même résolu en transitoire 3D.

Propriétés	Cas de référence	Bloc Homo
μ_r	300	$\langle \mu_{eq} \rangle$
ρ $\Omega.m$	0,45E-6	0,0
Epaisseur de tôle (mm)	0,6	Profondeur du domaine 0,7
Epaisseur d'isolant (mm)	0,1	

Tableau.6 – caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène

Les modèles en μ^* suffisent à caractériser les pertes 2D (dans le plan des tôles). La formulation **A** est utilisée.

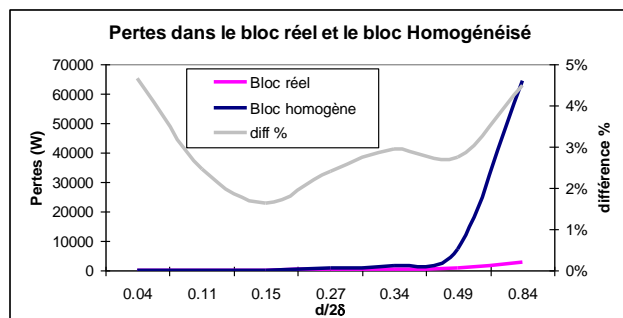


Figure 16 Résultats de validation du modèle 2D

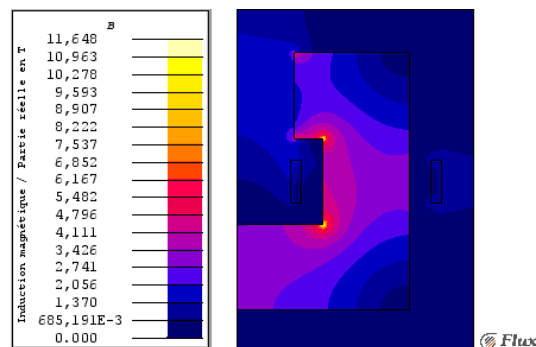


Figure 17 Iso valeurs de l'induction sur le modèle 2D

Les résultats de validation du modèle 2D homogénéisé sont présentés en figure 16. On remarque une erreur maximale à 4,7%. Ces résultats valident le modèle 2D homogénéisé et ouvrent une perspective d'application du modèle aux dispositifs 2D s'y prêtant, comme les moteurs.

Conclusions

Les modèles transitoires 2D avec pour principale application les moteurs, trouvent une solution de modélisation des pertes en une modification de la loi $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ du matériau. En effet le premier terme du vecteur de Poynting en \mathbf{E} et \mathbf{J} est quantifié puis transféré en sous entité du terme en \mathbf{H} et \mathbf{B} , apportant ainsi une modification de la loi $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. Cette nouvelle loi comporte le terme initial statique de la loi originelle auquel s'ajoute un terme dynamique de calcul de pertes. Ce modèle est validé après

modification de la nouvelle loi et prise en compte du coefficient de foisonnement. La validation conclut à une validité du modèle pour des matériaux linéaires et non linéaires en BF avec un maximum d'erreur à 3,8% dans les deux cas (cf. **2.1.** et **2.2.**).

Le modèle harmonique, lui est présenté par l'intermédiaire de deux modèles (analytique, numérique) qui sont d'une part confrontés et qui présentent une bonne concordance BF et HF (cf. figure 15). Ces modèles de façon analogue au cas transitoire modifient la loi $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, qui prend en compte les pertes électriques (cf. **4.2.3.**). Ce modèle après prise en compte du coefficient de foisonnement est validé et présente des résultats de qualité avec un pic d'erreur à 4,7%.

Cependant le modèle harmonique trouverait tout son intérêt dans un couplage avec des modèles de matériaux non linéaires. La plage d'applicabilité sur des dispositifs électromagnétiques en serait étendue.

Références

1. [Dular, 1996] P. Dular, “Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans les systèmes tridimensionnels non linéaires“. Thèse de doctorat, Université de Liège 1996.
2. [Gyselinck & Dular, 2004] J. Gyselinck & P. Dular, “A time-domain homogenization for laminated iron cores in 3D finite element models“. IEEE Transactions on magnetics, vol. 40, n°2, march 2004.
3. [Carpenter, 1977] C. J. Carpenter, “Theory of flux penetration into laminated iron and associated losses“, PROC. IEEE, vol. 124, n°7, July 1977.
4. [Faure, 2012] M. Faure, “Calcul des pertes Joule dans les circuits magnétiques 2D avec des techniques d'homogénéisation“, Stage ISIMA, CEDRAT, G2elab, 2012.
5. [Urma, 2000], D. Urma, G. meunier, C. Golovanov, “Magnetostatic phenomena and eddy currents losses modeling in a lamination core“. LEG Ensieg 2000.
6. [Meunier, 2008] G. Meunier, O. Maloberti, A. Kedous—Lebouc, "Pertes dynamiques dans les matériaux magnétiques", European Journal of Electrical Engineering RIGE, VOL 11/2—3, pp.303—332, 2008.
7. [Gyselinck, 1999] J. Gyselinck, L. Vendevelde and JMelkebeek, “Calculation of eddy currents and associated losses in electrical steel lamination“, IEEE Transactions on magnetics, vol. 35, n°3, pp. 1191-1194, 1999.
8. [Gyselinck, Sabariego & Dular, 2005] J. Gyselinck, R. Sabariego & P. Dular, “A nonlinear time-domain homogenization technique for laminated iron cores in three-dimensional finite element models", IEEE Transactions on Magnetism, vol. 42, n°4 pp. 763-766, april 2006.
9. [Gyselinck, Geuzaine & Sabariego, 2011] J. Gyselinck, C. Geuzaine, & R. V. Sabariego. Considering laminated cores and eddy currents in 2d and 3d finite element simulation of electrical machines. In Proceedings of the 18th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG2011), Sydney, Australia, July 12-15, 2011.

10. [Krähenbühl, 2004] L. Krähenbühl, P. Dular, T. Zeidan and F. Buret, “Homogenization of lamination stacks in linear magnetodynamics“, IEEE Transactions on magnetics AIM, vol. 40 n°2, pp. 111-123, 2004.

11. [Meunier, 2010] G. Meunier, V. Charmoille, C. Guérin, P. Labie and Y. Marechal, “Homogenization for periodical electromagnetics structure : Which formulation ? “, IEEE Transactions on magnetics, vol. 46, n°8, pp. 3409-3412, 2010.

12. [El Feddi, 1997] M. El Feddi, Z. Ren, A. Razek, A. Bossavit, “Homogenization technique for Maxwell equations in periodic structures”, IEEE Transactions on magnetics, vol. 33, n°2 pp-1382-1385, March 1997.

13. [Guérin, 1994] C. Guérin, “Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves des transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique“. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, 1994.

Figures

Figure 1 schéma d'un noyau feuilleté.

Figure 2 Comportements magnétiques dans une cellule d'empilement.

Figure I.13 Rappel du principe de l'homogénéisation 2D.

Figure 4 synoptique du programme de modélisation des pertes en 2D NL

Figure 5 Cas test de validation non linéaire.

Figure 6 Maillage du cas de référence non linéaire.

Figure 7 Erreurs de modélisation 2D Non Linéaire.

Figure 8 iso valeurs de B sur le coude ($B = 0.9T$) sur une partie du modèle 2D homogène.

Figure 9 Validation du modèle 2D linéaire ; Cas-test homogénéisé (gauche) cas réel comportant une tôle et un isolant (droit).

Figure 10 Maillage sur le cas de référence linéaire.

Figure 11 Comparaison des perméabilités réelles.

Figure 12 Comparaison des perméabilités imaginaires.

Figure 13 Principe général de l'homogénéisation.

Figure 14 Cellule élémentaire.

Figure 15 Validation des perméabilité et conductivité du modèle analytique

Figure 16 Résultats de validation du modèle 2D.

Figure 25 Isovaleurs de l'induction sur le modèle 2D.

Tableaux

1. Tableau.1 – Maillage et performances de calcul sur la partie linéaire de la courbe $B(H)$.
2. Tableau.2 – caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène (NL).
3. Tableau.3 – caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène (LIN).
4. Tableau.4 – résultats de validation linéaire à 50Hz.
5. Tableau.5 – Maillage et performances de calcul.
6. Tableau.6 – caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène.

Chapitre 3 : Modèles 3D

"Il n'y a dans l'homme que l'estomac à pouvoir être pleinement satisfait. La soif de connaissance et d'expérience, le désir d'agrément et de confort, ne peuvent jamais être apaisés."

Thomas Edison

Modèles 3D

Les modèles 3D permettent de représenter la plupart des dispositifs électromagnétiques dans leurs conditions réelles d'utilisation sans émettre d'hypothèses d'invariance de champs ou de potentiels.

- *Problème 3D*

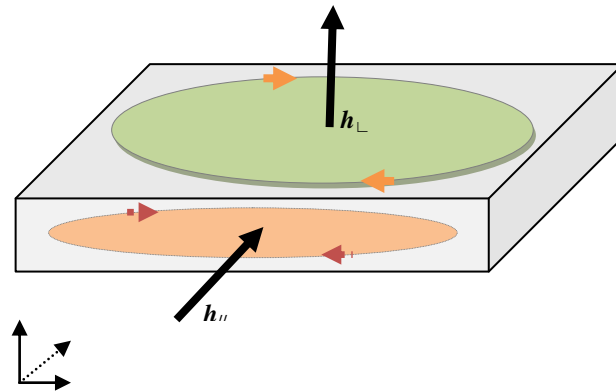


Figure 1 Problème de modélisation 3D

Comme le montre la figure 1, la modélisation d'une tôle en 3D exige de prendre en compte outre les phénomènes dans le plan des tôles (induits par \mathbf{h}_{\parallel}), l'influence des champs orthogonaux au plan des tôles (induits par \mathbf{h}_{\perp}). Les modèles de pertes 2D déjà validés permettent de calculer les pertes dans le plan des tôles. La prise en compte d'une troisième dimension dans la modélisation des pertes déjà amorcée en 2D, apporte une complexité supplémentaire aux modèles.

En effet, les champs dans une direction orthogonale au plan de laminage, induisent des courants de Foucault autour de ces lignes de champs. La définition d'une conductivité est donc nécessaire pour la caractérisation des pertes suivant cette direction.

On se rappelle qu'en modélisation 2D le bloc homogène est non conducteur pour la prise en compte des pertes dans le plan des tôles.

Dans cette partie notre mission sera de superposer au modèle de pertes 2D un modèle de pertes pour la troisième dimension qui dans le plus simple des cas pourrait être assimilé à un tenseur de conductivité anisotrope sur le bloc. L'absence de conductivité dans le plan de la tôle serait ainsi préservée pour la modélisation des pertes dites 2D.

On se rend compte dans la suite que la modélisation de cette conductivité anisotrope, pose plus ou moins problème suivant la formulation et le type de discrétisation EF utilisé (éléments nodaux ou d'arête).

Introduction

Cette partie présente l'ensemble des modèles 3D développés qui viennent en complément des modèles 2D de calcul de pertes par courants de Foucault. Rappelons qu'en modélisant les pertes par des modèles 2D, nous faisons un certain nombre d'hypothèses dont principalement une sur l'invariance des champs et des potentiels suivant la profondeur. Aussi, ils permettent par des calculs 2D simples de prendre en compte les courants de Foucault qui sont un phénomène 3D. Ces modèles 2D fournissent par là même, une qualité acceptable de résultats dans le cas où ces hypothèses sont respectées et pêchent face aux comportements 3D réels liés à l'existence de champ non planaires éventuellement dus à la présence d'entrefer dans les dispositifs modélisés. Le chapitre est consacré aux modèles de bloc homogène en 3D, plus à même de prendre en compte les phénomènes liés à la présence d'entrefer. Il est divisé en deux principales parties, traitant des modèles harmoniques et transitoires.

1. Modèles transitoires BF

Ces modèles concernent les applications en pas à pas dans le temps. Ils reprennent la même méthodologie qu'en 2D, qui consiste à modifier la loi $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ sur un matériau quelconque (cf. II.1.2.1.).

1.1. Intro transitoire BF

Comme en 2D, les modèles 3D BF font l'hypothèse d'absence d'effet de peau. Ce qui permet de considérer un rapport $d/2\delta < 1$, c'est à dire une épaisseur de peau au moins égale à la demi épaisseur de tôle. Cette hypothèse permet de quantifier les pertes par courants de Foucault par une dépendance au ratio $\frac{dB}{dt}$. Cependant des dérivées d'ordre supérieures apparaissent nécessairement quand l'épaisseur de peau devient négligeable devant l'épaisseur de la tôle entraînant de fait des décompositions d'ordre supérieur [Gyselinck & Dular, 2004]. De plus, bien que limitante, l'hypothèse BF permet de trouver une solution à moindre coût informatique aux calculs de pertes dans les dispositifs tels que les moteurs.

1.2. Formulations

Rappelons, que les formulations utilisées lors de la modélisation 3D sont des formulations en potentiel scalaire dont des développements sont faits dans le premier chapitre (cf. I.2.2.). Les calculs suivants s'inspirent de la modélisation des pertes par excès développée dans [Meunier, 2008], cf. I.3.1.3.

Il faudra donc pour résoudre, déterminer l'induction au pas courant \mathbf{B} et le tenseur de perméabilité incrémentale $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$. En se basant sur les équations suivantes I.(34 & 35) :

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \text{rot } \mathbf{T} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{T} \cdot \text{grad} \phi\end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant à la résolution de ce modèle en formulation 3D \mathbf{T} - ϕ . Le résidu à calculer est :

$$\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{W}_i \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}_i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\Omega = 0 \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} \text{grad} w_i \mathbf{B} \, d\Omega = 0 \quad (2)$$

Pour la résolution principale du système non linéaire en \mathbf{T} - ϕ , le terme de matrice tangente de Newton-Raphson, [Meunier, 2008], [Golovanov, 1993], les dérivées de \mathbf{B} et de \mathbf{E} par rapports aux inconnues du système sont évaluées comme suit :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{T}_j} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{T}_j} = \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] \text{rot} w_j \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \phi_j} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \phi_j} = - \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] \text{grad} w_j \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{T}_j} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{J}^t} \right] \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{T}_j} = \frac{1}{\sigma} \text{rot} w_j \quad (5)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \phi_j} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{J}^t} \right] \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \phi_j} = 0 \quad (6)$$

Ces calculs sont intégrés au résidu à calculer qui par la suite est appliqué au calcul de pertes dans les matériaux, linéaires puis non linéaires. Ils sont ensuite validés comparativement à une référence qui en fait est une cellule élémentaire d'empilement de tôles.

Pour les besoins de la résolution principale, \mathbf{B} et $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$ doivent être déterminés. Nous donnerons dans un premier temps des détails sur les développements préliminaires nécessaires à la détermination de \mathbf{B} et $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$ en non linéaire puis en linéaire. Les expressions en linéaire sont un cas particulier des expressions obtenues pour le cas non linéaire.

- **Calcul préliminaire**

Pour plus de cohérence, nous présentons les résultats de calculs $\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t}$ nécessaires au calcul de $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$. Les termes du tenseur $\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t}$ sont obtenus par des calculs similaires à ceux détaillés pour le 2D transitoire non linéaire (cf. II.1.1.3.). Nous nous contenterons juste de donner un aperçu du tenseur et les expressions finales des termes le composant.

$$\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} = [\mu] + \begin{bmatrix} 2H_x^2 \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} & 2H_x H_y \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} & 2H_x H_z \frac{\partial \mu_t}{\partial H_n^2} \\ 2H_x H_y \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} & 2H_y^2 \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} & 2H_x H_y \frac{\partial \mu_t}{\partial H_n^2} \\ 2H_x H_z \frac{\partial \mu_t}{\partial H_n^2} & 2B_x B_y \frac{\partial \mu_n}{\partial H_t^2} & 2H_z^2 \frac{\partial \mu_n}{\partial H_n^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

avec,

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_t & 0 & 0 \\ 0 & \mu_t & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mu_t = \frac{1}{v_t} \text{ et } \mu_n = \frac{1}{v_n} \quad \text{cf. II.(5) II.(8)}$$

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} = \frac{1}{2} K$$

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial H_n^2} = \frac{1}{2} K Q^2$$

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial H_t^2} = \frac{1}{2} K Q^2$$

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial H_n^2} = \frac{1}{2} K Q^4$$

Pour K et Q définis tel que pour μ_l perméabilité de la tôle :

$$K = \frac{\lambda \mu_0 C}{\mu_0 + (1-\lambda) C Q^2 H_n^2}$$

$$Q = \frac{\mu_n}{\mu_l} = \frac{\mu_0}{\lambda\mu_0 + (1-\lambda)\mu_l}$$

1.2.1. Calcul de \mathbf{B} au pas courant et de $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$ pour les matériaux non linéaires

Les matériaux non linéaires sont caractérisés par une loi $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ non linéaire. Cette loi est prise en arc tangente comme au chapitre 2.

La définition des modèles de calcul de pertes en transitoire est basée sur le principe de modification de la loi $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ et son remplacement par une loi prenant en compte les pertes par courants de Foucault.

Comme pour les modèles linéaires, les inconnues \mathbf{B} et $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$ sont déterminées pour le calcul du résidu. Sauf qu'ici, \mathbf{B} ne peut être obtenu qu'après plusieurs itérations de résolution non linéaire de la fonction définie en (12). Le tenseur de perméabilité incrémentale est quant à lui calculé et explicité par l'équation (16).

Aussi, le bloc homogène servant à modéliser l'empilement sera pour les mêmes raisons que précédemment défini comme étant non conducteur, avec cette fois-ci une propriété magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ non linéaire.

- *Calcul de \mathbf{B} au pas courant*

Nous devons d'une part trouver l'expression de \mathbf{B} sachant que \mathbf{T} et ϕ permettent naturellement de trouver \mathbf{H} . Dès lors qu'on ne dispose pas de \mathbf{B} explicitement et que l'on suppose connue la loi statique $\mathbf{b} = \mathbf{b}_s(\mathbf{h})$, l'induction magnétique consolidée s'écrira [Meunier, 2008] :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{b}_s(\mathbf{H} - \mathbf{h}_d) \end{aligned} \tag{9} \tag{10}$$

tel que $\mathbf{h}_d = \sigma \frac{d^2 \mathbf{B}}{12 dt}$, champ dynamique prenant en compte les pertes, \mathbf{H}_m champ magnétostatique. $\mathbf{b}_s()$ est la loi d'induction statique et \mathbf{B}_p l'induction au pas précédent.

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_s \left(\mathbf{H} - \sigma \frac{d^2 (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p)}{12 \Delta t} \right) \tag{11}$$

où \mathbf{H} et \mathbf{B}_p sont connus, avec \mathbf{B} comme inconnue à déterminer. D'où un système non-linéaire à résoudre en annulant la fonction $g(\mathbf{B})$ définie par :

$$g(\mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mathbf{b}_s \left(\mathbf{H} - \sigma \frac{d^2 (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p)}{12 \Delta t} \right) = 0 \tag{12}$$

Différentes méthodes de résolution peuvent être utilisées, dont Newton-Raphson. Nous résolvons dans ce cas à chaque itération "i" de Newton-Raphson :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{B}} \right]_i (\mathbf{B}_{i+1} - \mathbf{B}_i) = -\mathbf{g}(\mathbf{B}_i) \quad (13)$$

Evaluons le terme de matrice tangente $\left[\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]_i$. En effet ce terme peut être décomposé comme suit :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{B}} \right]_i &= \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}} \right] - \left[\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial \mathbf{B}} \right] \\ \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{B}} \right]_i &= [\mathbf{I}] + \left[\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{h}_d}{\partial \mathbf{B}} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

avec $\mathbf{H}_m = \mathbf{H} - \mathbf{h}_d$, \mathbf{H}_m champ magnétostatique.

$$\left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{B}} \right]_i = [\mathbf{I}] + \frac{1}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} \right] \left[\frac{\sigma d^2}{12} \right] \quad (15)$$

Remarque : Dans le cas d'un matériau non linéaire, B est déterminé par une résolution NL différente de celle de la résolution principale.

- Calcul du tenseur de perméabilité incrémentale $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$

Toujours selon la loi statique, on écrit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)$$

avec $\mathbf{H}_m = \mathbf{H} - \mathbf{h}_d$. Donc,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] &= \left[\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial \mathbf{H}^t} \right] \\ \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] &= \left[\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} \right] \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] - \left[\frac{\partial \mathbf{h}_d}{\partial \mathbf{B}^t} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] \right\} \\ \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] &= \left[\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} \right] \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] - \left[\frac{\partial \left[\sigma \frac{d^2}{12} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]}{\partial \mathbf{B}^t} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] \right\} \end{aligned}$$

d'où

(16)

$$\left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] = \left\{ [\mathbf{I}] + \frac{\sigma}{\delta t} \frac{d^2}{12} \left[\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} \right] \right\}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} \right]$$

Le calcul suivant permet à travers la détermination du tenseur de perméabilité incrémentale de pouvoir évaluer le résidu [Meunier, 2008].

1.2.2. Calcul de \mathbf{B} au pas courant et de $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$ pour les matériaux linéaires

Les modèles linéaires, établissent l'existence d'une fonction \mathbf{b}_s constante définie telle que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_s(\mathbf{H}_m)$$

Ce qui permet de définir des expressions de \mathbf{B} et $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$. Ces expressions trouvent par la suite place dans le calcul du résidu. Le modèle ainsi caractérisé, est utilisé pour la résolution et le calcul de pertes a priori. De plus, il sera défini sur un bloc homogène uniforme de conductivité nulle suivant le principe utilisé pour la modélisation 2D (cf. II.1.2.1.).

- *Calcul de \mathbf{B} au pas courant*

Si le matériau des tôles est linéaire et isotrope, on définit une loi statique caractérisée par le tenseur diagonal de perméabilité (8).

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_t & 0 & 0 \\ 0 & \mu_t & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n \end{bmatrix}$$

inverse du tenseur défini en II.1.2.1.2. Selon l'équation (11) nous pouvons écrire :

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H}_m \quad (17)$$

$$\mathbf{B} = [\mu] \left(\mathbf{H} - \sigma \frac{d^2}{12} \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{B}_p)}{\Delta t} \right) \quad (18)$$

d'où :

$$\mathbf{B} = \left[[\mathbf{I}] + \frac{1}{\Delta t} \frac{\sigma d^2}{12} [\mu] \right]^{-1} [\mu] \left[\mathbf{H} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\sigma d^2}{12} \mathbf{B}_p \right] \quad (19)$$

- Calcul du tenseur de perméabilité incrémentale $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t}$ pour la résolution principale

Dans le cas linéaire, l'expression du tenseur de perméabilité incrémentale est tirée de (16). Le terme $\left[\frac{\partial b_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t} \right]$ est réduit à $[\mu]$.

$$\left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}^t} \right] = \left[[\mathbf{I}] + \frac{1}{\Delta t} \frac{\sigma d^2}{12} [\mu] \right]^{-1} [\mu] \quad (20)$$

1.2.3. Implantation dans un code éléments finis

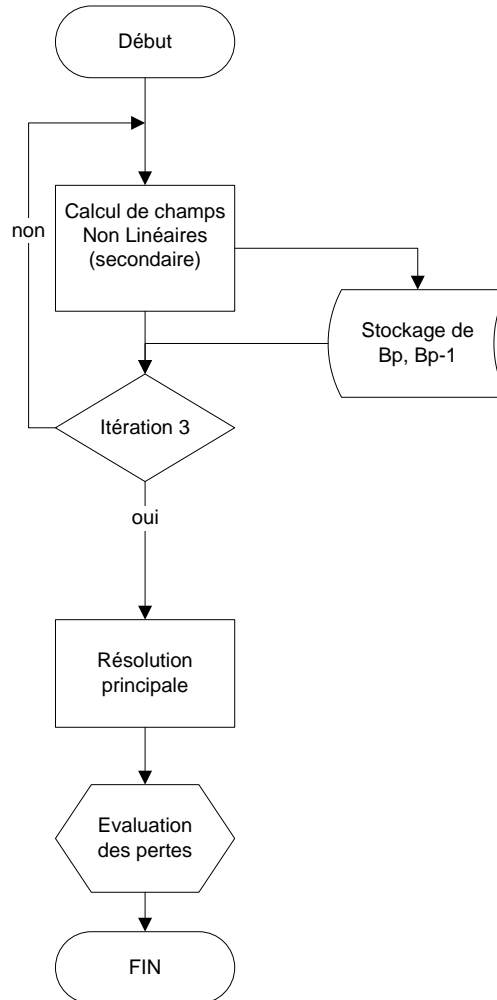


Figure 2 synoptique du programme de calcul des pertes

- **Calcul de champs NL**

Cette routine prend en entrée le champ magnétique global homogénéisé, à partir duquel il déduit le champ puis l'induction dans les tôles. Il permet en outre de calculer le tenseur de perméabilité incrémentale $\frac{\partial b_s(\mathbf{H}_m)}{\partial \mathbf{H}_m^t}$ en ayant pour entrée $\left(\mathbf{H} - \sigma \frac{d^2(\mathbf{B} - \mathbf{B}_p)}{dt} \right)$.

Aussi, cette routine permet en sortie de disposer de la fonction $\mathbf{g}(\mathbf{B})$ détaillée en (12). Notons que \mathbf{B}_p est stockée.

- **Routine de résolution principale**

Cette routine est la duale de celle déjà vue en 2D. C'est une routine, qui selon le contexte (Magnéto Transitoire, Magnéto Harmonique, Magnéto Statique etc.) permet d'aiguiller sur différents modèles de calcul selon les caractéristiques physiques des différents matériaux.

Dans notre cas, il doit aiguiller la résolution sur un matériau défini par l'utilisateur dont les propriétés sont obtenues après calculs de propriétés de matériaux.

- **Evaluation des pertes**

Les modèles étudiés sont des modèles de calcul de pertes a priori, ces pertes sont donc déjà prises en compte dans la formulation, à la résolution. Par contre, cela n'empêche pas de les évaluer ensuite. Comme lors des validations 2D transitoires le calcul fait est l'intégrale suivante, II.2.1.2. :

$$\int_t^{t+T} \mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt$$

Rappelons que, par la modification de la loi magnétique l'intégration sur une période complète du terme magnétique du vecteur de Poynting se résume à une intégration du terme dynamique qui vient modifier la loi magnétique. Le terme originel d'échange étant d'intégrale nulle sur une période.

2. Validation

La validation est divisée en deux parties, une première pour le modèle purement linéaire avec une courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ ayant comme pente la perméabilité relative. Une seconde pour le modèle 3D non linéaire ayant une courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ caractérisée par une pente à l'origine et une induction à saturation. De plus, la validation non linéaire se fera sur trois points distincts de la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ décrivant successivement, la partie linéaire, le coude, et la partie saturée. Les calculs pour définir les excitations correspondant à ces trois points sont similaires à ceux vu en 2D non linéaire en II.2.1.

De plus, ce cas de validation diffère des précédents en ce qu'il compare la référence 3D à un cas homogénéisé 3D équivalent à une cellule d'empilement (1 tôle + 1 isolant), ne nécessitant qu'un élément dans l'épaisseur pour la résolution et le calcul des pertes. Ce dernier cas 3D sera non-conducteur.

On peut aussi noter que, cette validation est effectuée pour une fréquence de 50Hz, fréquence où $\delta \approx 4d$. Une intégration est faite sur plusieurs périodes afin de pouvoir ne considérer que la dernière pour s'affranchir des transitoires numériques.

- **Cas-test**

On utilisera un cas test 2D traité en 3D déjà vu en figure II.5. Il est composé d'une tôle semi-circulaire et d'une couche d'isolant. Le champ magnétique est créé par deux densités de courant de direction z et $-z$. Des conditions aux limites identiques à celles de la figure II.5 sont par la suite définies.

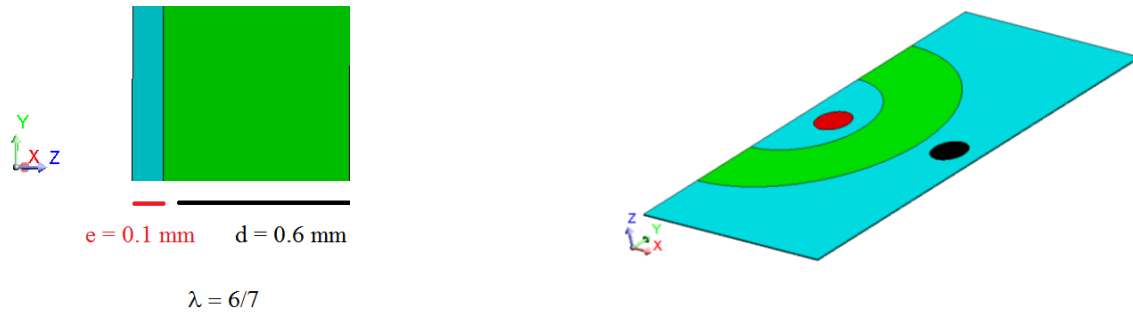


Figure 3 Cas de référence de validation (Rappel du cas-test décrit à la figure II.5)

- **Maillage**

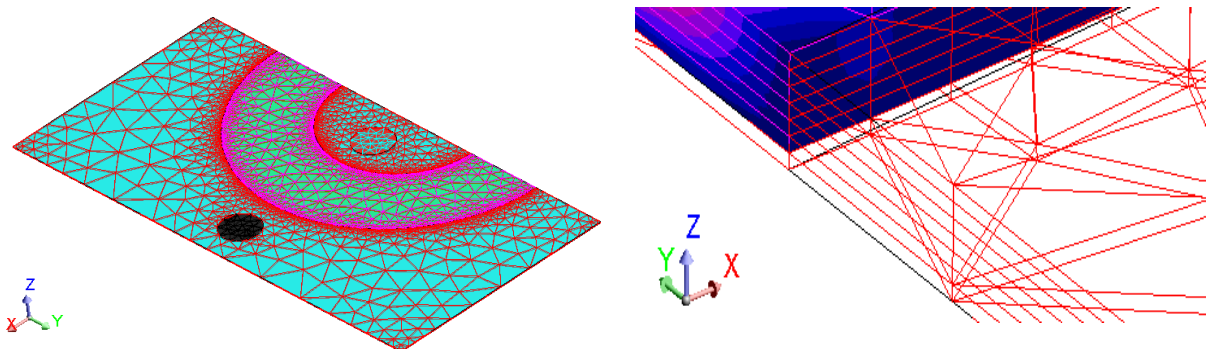


Figure 4 Maillage du cas de référence

Le cas de référence et le modèle homogénéisé ont la même discrétisation surfacique ; Le maillage du cas de référence étant une extrusion de ce maillage surfacique. Pour cette validation BF, le cas de référence ne comportera que trois éléments dans

l'épaisseur de peau tandis que le modèle homogénéisé n'en comportera qu'un pour la plage d'étude.

- **Propriétés physiques**

Propriétés	Cas de référence	Bloc Homo
μ_r	1000	1000
ρ $\Omega.m$	0,45E-6	0,0
Epaisseur de tôle (mm)	0,6	Profondeur du domaine 0,7
Epaisseur d'isolant (mm)	0,1	

Tableau.1 – caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène

Les propriétés physiques des tôles et du modèle homogénéisés sont décrites dans le tableau.2

- **Résultats de validation**

	Cas de référence	Cas homogénéisé 3D
Nombre d'éléments	37065	5214
Temps de calcul (s) Core i5 2,67GHz, 4 coeurs	10692s	16660s

Tableau.2 – Maillage et performances de calcul sur la partie linéaire

La validation est faite à une seule fréquence BF de 50Hz. L'étape suivante de validation sera une validation sur un plus large spectre de fréquence. La validation sur une fréquence permet de valider la formulation utilisée. Les limites du modèles feront l'objet d'une étude en même temps que le non linéaire. L'intégration des pertes se fait seulement sur la troisième période après avoir vérifié que le transitoire numérique est dépassé. On notera qu'une discrétisation de 40 pas est définie sur chaque période de calcul.

Le tableau 3 permet de conclure quant à la validité du modèle linéaire 3D de calcul de pertes a priori avec une erreur relative de 2% (par rapport au cas de référence).

Cas de référence	Cas homogénéisé	Erreur
0,371E-06	0,378E-06	1,9%

Tableau.3 – comparaison des pertes à 50Hz

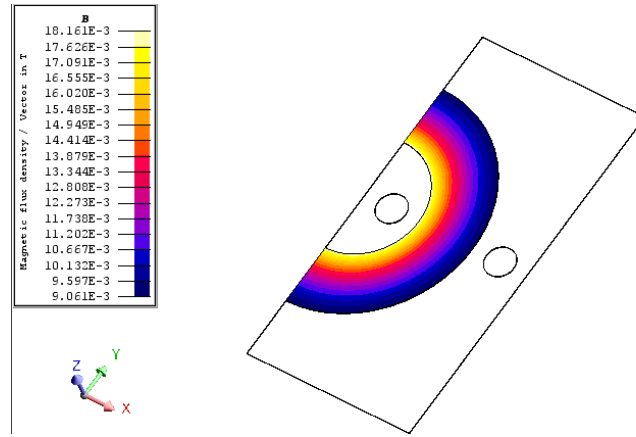


Figure 5 Iso valeurs de B sur le cas homogénéisé

La figure 5, illustre la cohérence des lignes de champs avec le modèle de bloc homogène. A noter qu'aucun post calcul ne peut être fait sur la densité de courant vu que le dispositif est non conducteur.

2.1. Conclusions

Le modèle de pertes pour les résolutions transitoires linéaires 3D est validé. Le cas non linéaire peine à converger et est toujours en investigation. On a vu plus haut en **1.2.1.** que \mathbf{B} devrait être obtenu après plusieurs itérations Newton Raphson. Aussi, la complexité de la matrice de perméabilité posent des problèmes de convergences. Notons que pour les calculs à l'itération t , on doit avoir stocké les valeurs aux deux itérations précédentes. Il faudrait éventuellement trouver une méthode de résolution ou réévaluer des critères de convergence du moment que la solution oscille sur un segment.

- **Aperçu transitoire HF**

Les modèles d'homogénéisation transitoire HF viennent en complémentarité de ceux développés en BF. En effet il arrive que sur des dispositifs BF comme les moteurs électriques, les encoches « voient » des variations de champs HF du fait de la vitesse de rotation. Aussi l'intégration de ces modèles permettrait de mieux quantifier les pertes pendant les régimes transitoires des dispositifs sous-tension. Ceci sans oublier la quantification des pertes dans les dispositifs électromagnétiques évoluant en transitoire HF (relativement à l'effet de peau).

Différents modèles sont développés dont [Gyselinck & Dular, 2004] qui proposent des développements d'ordre supérieur de l'induction qui requièrent plusieurs inconnues aux nœuds du maillage.

3. Modèles harmoniques linéaires

Cette partie traite de modèles à signaux sinusoïdaux dans le temps. Ils s'attèlent à la modélisation des pertes avec pour principales cibles les transformateurs. Cependant le développement des modèles n'est qu'une première étape vers un modèle intégrant la prise en compte des matériaux non linéaires qui pourra être couplée au module de calcul de pertes. Ceci pour dire que les modèles de pertes et de matériaux sont presque indépendants.

Après une introduction aux modèles harmoniques, le modèle de bloc homogène puis les modèles de tôles homogènes sont présentés ainsi que leurs limites. En fin de chapitre des conclusions et des pistes d'amélioration seront exposées.

Présentation

Les modèles harmoniques 3D s'inspirent fortement de ceux déjà présentés en 2D (cf. II.3.). En effet dans la modélisation 2D réalisée, l'homogénéisation est faite en considérant uniquement une perméabilité complexe dans la direction privilégiée de circulation du flux magnétique. Ceci s'explique aisément par l'utilisation du 2D (champs et induction magnétiques confinés dans le plan et absence de courant de Foucault dans le plan des tôles). Ces hypothèses faites par l'utilisation de modèles 2D ne siéent pas à la modélisation de dispositifs complexes puisque comportant réellement des composantes de champs qui ne sont pas localisées dans plan d'étude. Un cas problématique pour ce type de modèles 2D est la modélisation des champs autour d'un entrefer.

Dès lors, il faudra réfléchir à comment modéliser ces composantes non planaires du champ magnétique et ensuite trouver un moyen d'intégration aux modèles de pertes 2D déjà validés.

Une méthode modélise les champs non planaires au moyen d'une conductivité homogénéisée [Gyselinck & Dular, 2004] et d'une « contrainte » sur les propriétés électriques et/ou les variables d'état [Carpenter, 1977] ;

Rappelons que les blocs sont laminés pour empêcher le rebouclage des courants sur l'épaisseur d'un bloc conducteur. Le laminage ayant pour effet de réduire les surfaces des boucles de courants directement liées aux pertes; l'idée est de reproduire un comportement similaire aux boucles de courant dans le plan de laminage en imposant des valeurs aux paramètres électriques du modèle.

La figure 6 illustre à juste titre la configuration de courants voulue sur le cas homogénéisé. Un champ quelconque est composé d'un champ $\mathbf{h}_{//}$ dans le plan des tôles et d'un champ \mathbf{h}_{\perp} orthogonal au plan de tôles. Seule la modélisation des courants induits par \mathbf{h}_{\perp} nous intéresse, les courants induits par $\mathbf{h}_{//}$ ayant déjà fait l'objet d'une étude en 2D.

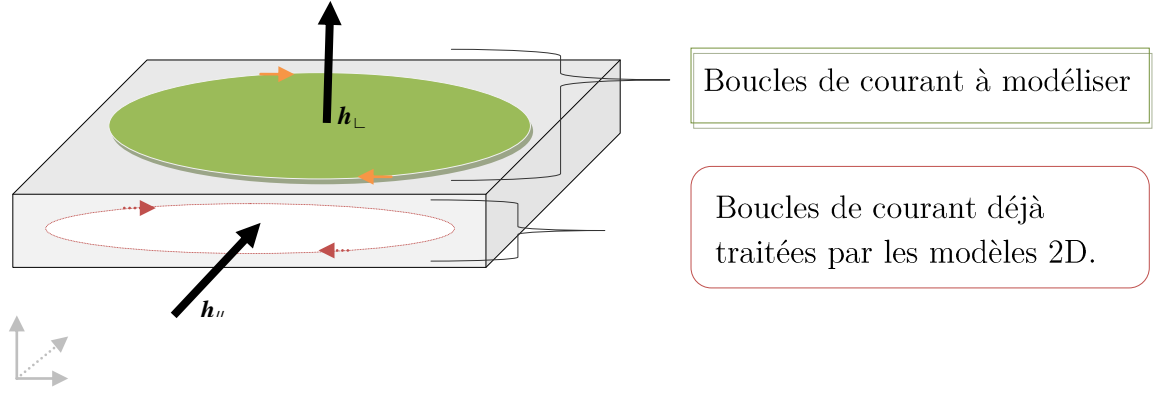


Figure 6 Modélisation de champs $h_{//}$ et h_{\perp}

- *Méthode utilisant un tenseur anisotrope de conductivité*

La méthode immédiatement candidate propose (toujours pour la modélisation des champs non-planaires), de définir un tenseur anisotrope de conductivité comme propriété électrique du matériau homogénéisé.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_t & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Où σ_t est la conductivité homogénéisée définie en II.(56) Ce tenseur permet donc de rendre compte dans le cas homogénéisé du comportement induit dans l'empilement par les couches isolantes. En effet, suivant la direction Z si l'on admet que le feuilletage du cas de référence est suivant le plan XOY, aucune boucle de courant ne se forme sur l'épaisseur.

Cependant, cette solution ne sera pas retenue car conduisant à des systèmes mal conditionnés aboutissant dans le meilleur des cas à de longues résolutions et au pire à des non convergences.

- *Méthode utilisant une contrainte sur les variables d'état [Carpenter, 1977]*

Cette méthode beaucoup plus efficace, présente plusieurs avantages que l'on verra par la suite. Elle consiste à imposer la contrainte directement dans la formulation. Par exemple pour la formulation \mathbf{T} - ϕ la méthode impose sur le volume du cas homogène la condition :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_Z \text{ équivalente à } (\mathbf{T}_X = \mathbf{T}_Y = \mathbf{0})$$

Et puisque $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{T}$

$$\mathbf{J}_Z = \mathbf{0} \quad (22)$$

Remarque: Pour l'application de la méthode avec contrainte \mathbf{T} doit être en approximation nodale. En \mathbf{T} d'arête la méthode n'est pas applicable, l'utilisation d'un tenseur de conductivité isotrope reste la seule méthode envisageable dans ce cas.

On peut déjà noter que nous passons avec cette méthode d'une formulation \mathbf{T} - ϕ vectorielle à une formulation \mathbf{T}_z - ϕ scalaire puisque \mathbf{T} n'a qu'une seule composante suivant z .

3.1. Modèle de bloc homogène

3.1.1. Pertes par courants de Foucault dans le plan des tôles

Ce sont les pertes que nous appelons « pertes 2D » qui comme leur nom l'indique comptabilisent les pertes pour un champ magnétique uniquement dans le plan des tôles. Ces pertes sont modélisées dans le chapitre 2 et les modèles validés. Cependant, dans le cas où le champ est essentiellement dans le plan 2D, suivant le triplet (μ_r, μ_0, σ) différentes configurations se posent. Pour $\mu_r \gg 1$ des lignes de fuites sont présentes, et leur influence dans les pertes est non-négligeable. Pour exemple, reprenons la tôle de la figure 6 et donnons-lui des dimensions.

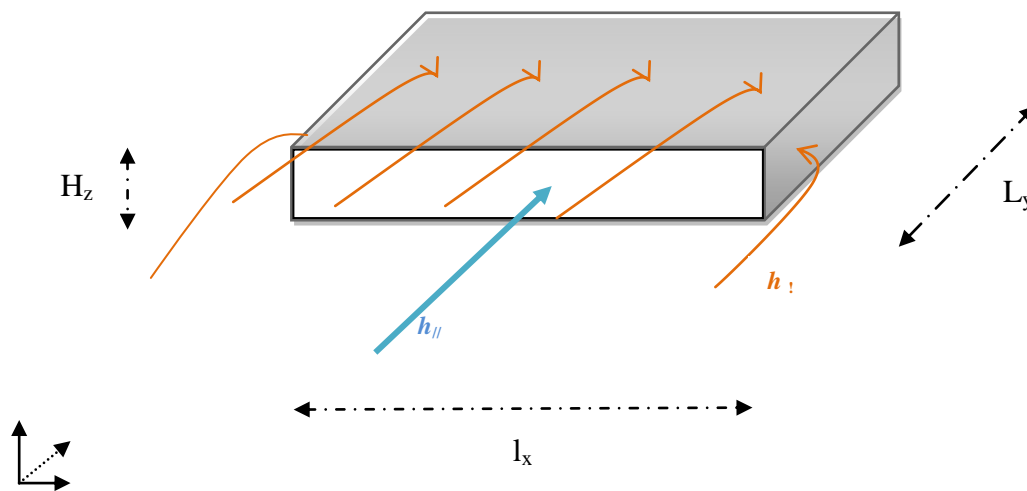


Figure 7 Influence des champs non planaires

Pour un champ de fuite h_f d'amplitude dix fois inférieure à celle du champ imposé h_{ij} , les pertes engendrées par l'un et l'autre champ sont du même ordre de grandeur dès lors que la surface d'attaque des lignes de fuite (ici surface grise) est cent fois plus grande que celle du champ imposé (ici en blanc). Cette condition est souvent remplie pour les tôles dont l'épaisseur dépasse rarement le demi-millimètre.

Donc pour modéliser correctement les pertes par courant de Foucault, le modèle 2D ne suffit plus car il ne prend en compte que les pertes dans le plan de la tôle. Une possible solution est évoquée dans la sous-section suivante.

3.1.2. Pertes par courants de Foucault dans la direction orthogonale au plan des tôles

Les blocs magnétiques sont toujours laminés dans la direction principale de circulation des champs. Or, l'existence des lignes de fuite et d'autres phénomènes 3D, conduit à considérer ces champs non-planaires comme partie intégrante des phénomènes à modéliser. Comme le montre la figure 8 nous nous contenterons de modéliser ces courants par une conductivité équivalente et une contrainte assurant des courants planaires dans le bloc.

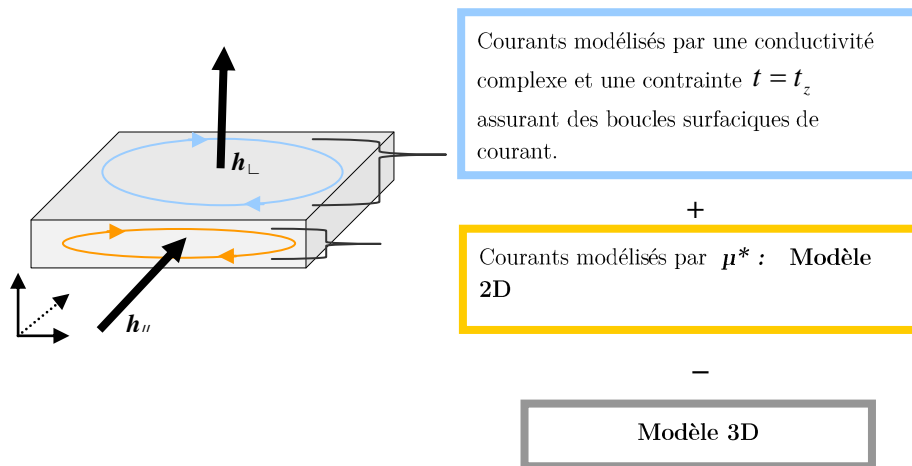


Figure 8 Modèle 3D de pertes par courants de Foucault

4. Validation 3D

4.1. Modèle de bloc homogène uniforme

Suite au rajout de la contrainte modélisant les courants dus aux champs dans la troisième direction à la modélisation 2D, nous disposons d'un modèle 3D qui fera l'objet d'une validation sur un cas test défini ci-après résolu en formulation T_z - ϕ nodale.

- Cas – test

- Géométrie

Il est illustré en figure 9. Il représente un huitième de circuit magnétique à section rectangulaire. Le circuit complet est obtenu en considérant les symétries définies et qui permettent de définir les conditions aux limites du dispositif simulé (cf. figure 9). Le circuit magnétique est constitué de 11 tôles décrites avec une symétrie horizontale et excité par une bobine inductrice.

Ces tôles ont une largeur de piste de 30mm et sont épaisses de 0,6mm. Les couches isolantes quant à elles ont une épaisseur de 0,1mm soit un coefficient de foisonnement de 0,857. La longueur du circuit-tôle est de 110 mm avec un entrefer de 10mm soit une longueur de circuit fermé de 120mm.

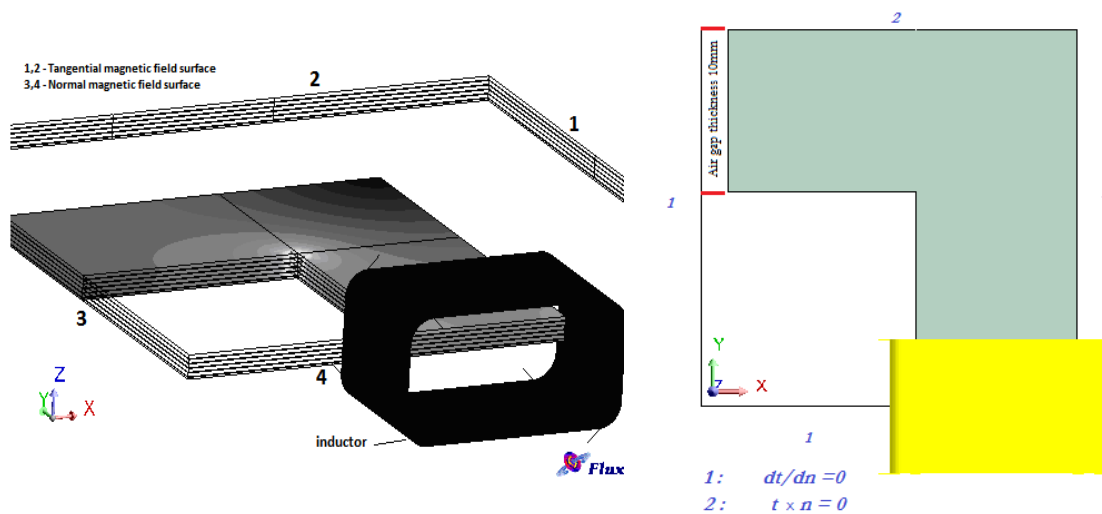


Figure 9 cas-test de validation 3D

- Maillage

Pour le cas de référence il est toujours défini 3 éléments dans l'épaisseur de peau. Et en fonction des fréquences maximales de simulation le nombre d'éléments passe de 3 à 9 dans l'épaisseur de chaque tôle.

Le cas homogénéisé présente quant à lui une discrétisation d'un élément par épaisseur de peau.

On notera que les 2 cas ont la même discrétisation surfacique du plan de base, le maillage 3D étant extrudé de ce dernier plan.

	Cas de référence	Modèle 3D
Nombre d'éléments	72364	10976
Temps de calcul (s)	2016	141
Core i5 2,67GHz, 4 coeurs		

Tableau.4 – Maillage et performances de calcul pour la validation 3D harmonique.

- Propriétés physiques

	Bloc réel	Bloc Homo
μ_r	300	$\langle \mu_{eq} \rangle$
σ ($\Omega.m$)	0,45E-6	$\sigma^* = G^* \sigma$
Epaisseur de tôle (mm)	0,6	Nbr_tôles *0,7
Epaisseur d'isolant (mm)	0,1	

Tableau.5 – Caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène

- Résultats de validation

Dans le cas d'un circuit magnétique fermé (entrefer nul), le champ et l'induction magnétique sont principalement dans le plan de la tôle, privilégiant ainsi les pertes en $G^* \mu$ (cf. II.3.1.1.). Nous nous retrouvons ici dans un cas où l'hypothèse 2D reste valide. Les résultats de validation confirment cette tendance avec une prépondérance des pertes en μ^* .

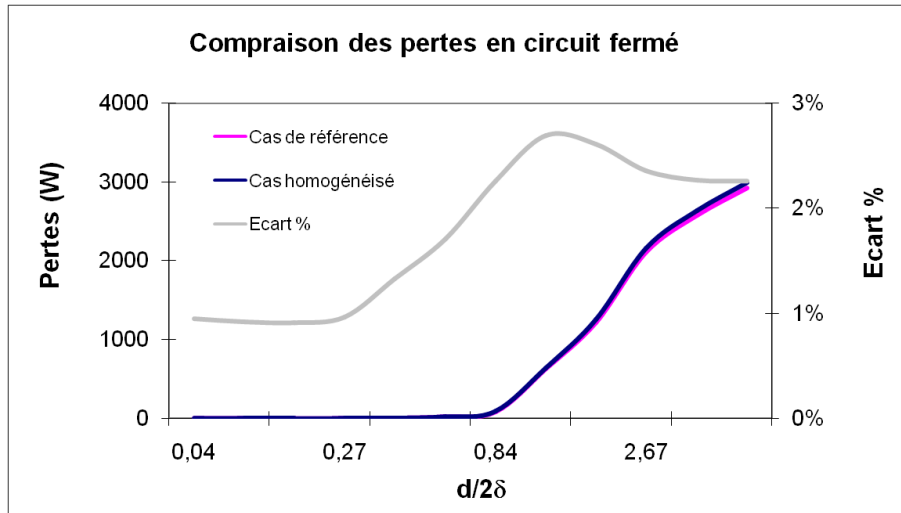


Figure 10 Pertes sur un circuit magnétique fermé

Cependant l'augmentation de la largeur d'entrefer met en évidence la faiblesse de la modélisation des pertes dues aux champs non-planaires par une conductivité complexe et une contrainte sur \mathbf{T} . La courbe suivante illustre bien la variation de la précision des résultats en fonction de la largeur d'entrefer. Ces calculs sont BF à 0.05, 7 et 50Hz.

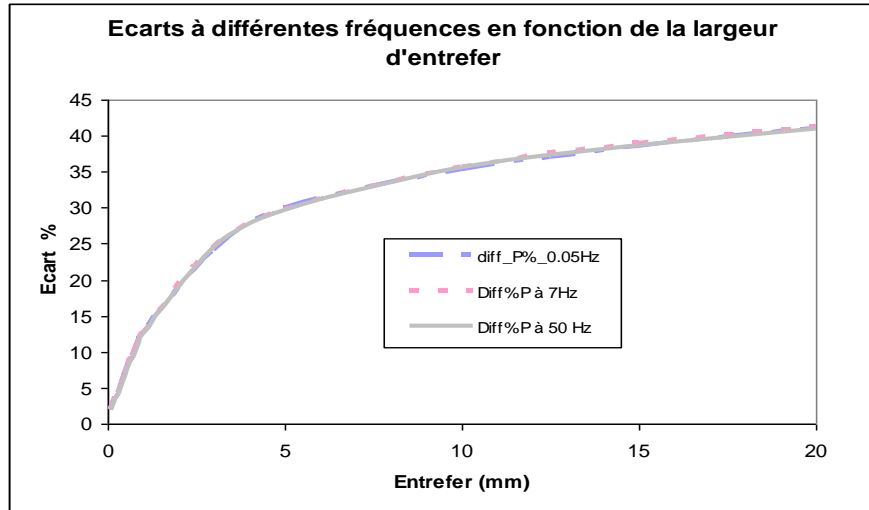


Figure 11 Variation de l'Erreur de modélisation en fonction de la largeur de l'entrefer

Nous pouvons remarquer sur la figure 11 que pour un circuit magnétique ouvert et résolu à basse fréquence, l'erreur de modélisation n'est fonction que de la largeur d'entrefer. On remarque en effet que les courbes à trois diverses fréquences BF se superposent.

Notre modèle 3D ne marche donc que pour des dispositifs à rapport largeur « **entrefer/longueur** » du circuit magnétique faible. Il pourrait être adapté à des transformateurs.

4.2. Limites du modèle de bloc homogène

Les résultats des sous-sections précédentes, montrent une variation de la précision de résultat en fonction de la largeur d'entrefer. Un exemple probant est montré en figure 12 où déjà en BF, l'erreur de modélisation avoisine les 35% pour un rapport largeur entrefer/longueur circuit magnétique de 1/12.

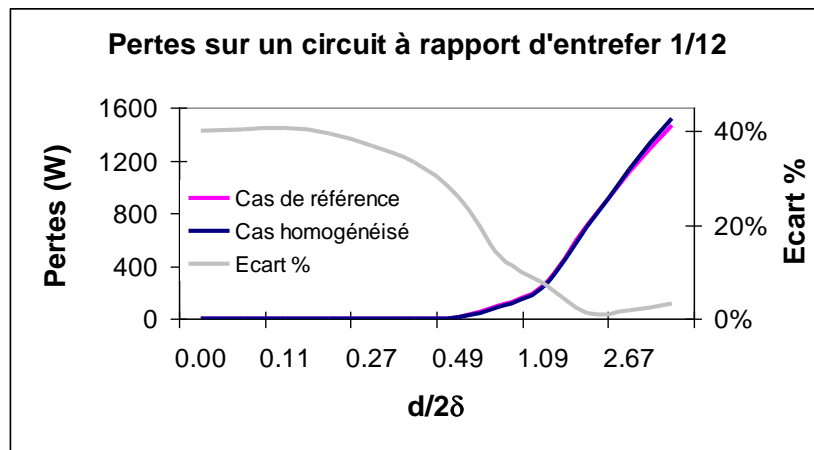


Figure 12 Validation du modèle 3D pour une ouverture de 1/12

Nous pouvons conclure, d'après la figure 12 que dans l'absolu le modèle 3D de bloc homogène ne permet pas de calculer les pertes avec une précision acceptable. Des investigations sur la répartition des pertes en μ^* et σ^* respectivement pertes dues au champ dans le plan des tôles, pertes dues aux champs non parallèles au plan des tôles permettent de voir que les pertes en σ^* sont négligeables devant celles en μ^* à basse fréquence pour le modèle de bloc homogène uniforme.

Analyse:

Rappelons que le modèle 3D de calcul de pertes est une superposition du modèle 2D (en μ^*) déjà validé et d'une contrainte sur \mathbf{T} pour la prise en compte des pertes dues aux champs dans la troisième direction (en σ^*).

Si l'on admet une faible interaction entre ces deux types de pertes, l'évaluation des pertes en σ^* pose nécessairement problème dans le cas du modèle de bloc homogène.

En comparant les densités de courant sur le bloc de tôles et sur le bloc homogène on se rend compte :

- de la décroissance graduelle des pertes en σ^* d'une tôle à la tôle inférieure pour le bloc réel de tôles
- d'une quasi-inexistence des pertes en σ^* pour le bloc homogène hormis en surface.

On remarque aussi que la première tôle (tôle du dessus du bloc réel de tôles) comporte une distribution de courants comparable à celle du haut du bloc homogène. Le reste du bloc homogène ne comportant aucune densité de courant.

De ces constatations émerge l'hypothèse selon laquelle :

Le bloc homogène ne modélise pas les pertes en σ^* présentes sur les tôles du bloc réel hormis sur celle du dessus.

C'est donc, inspiré des travaux développés dans l'article de [De Gersem, 2012], qu'un nouveau modèle est proposé. Il se différencie du modèle précédent par le feuilletage du bloc homogène en tôles homogènes.

Le modèle de tôles homogènes proposé ci dessous est plus facile à mettre en œuvre que la méthode explicitée dans [De Gersem, 2012], [Bottauscio, 2002] parce qu'il ne résout pas de formulations couplées.

4.3. Modèle de tôles homogènes

Toujours en formulation \mathbf{T} - ϕ nodale, nous proposons de feuilletter le bloc homogène pour retrouver les informations de densité de courant sur les tôles intermédiaires, que le bloc homogène ne modélise pas correctement. Les caractéristiques physiques restent les mêmes.

Ici:

- l'homogénéisation est faite tôle à tôle; Une propriété magnétique μ^* **sans prise en compte du coefficient de foisonnement** est appliquée à chaque tôle (du modèle de tôles homogènes) pour le calcul des pertes dans le plan de la tôle.
- La contrainte assurant des courants surfaciques $\mathbf{T} = \mathbf{T}_Z$ pour la prise en compte des pertes dans la troisième dimension est appliquée cette fois ci sur chacune des tôles (du modèle de tôles homogènes).

Le modèle sur la figure 13 est remplacé par celui en figure 14. Les figures de gauche représentent une portion de bloc réel à modéliser ; celles de droite les cas homogénéisés correspondants.

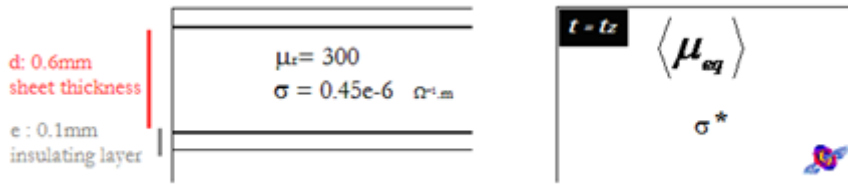


Figure 13 tôles réelles (gauche), modèle de bloc homogène (droite)

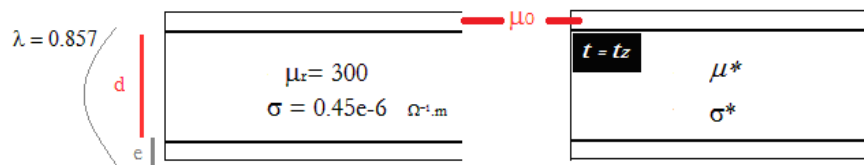


Figure 14 tôles réelles (gauche), modèle de tôles homogénéisées (droite)

Le modèle de tôles homogénéisées est ensuite évalué avec le même cas-test précédemment appliqué au modèle de bloc homogène, le cas du circuit magnétique avec entrefer de $1/12$.

Les résultats obtenus sont exposés en figure 15. Celle-ci compare les erreurs obtenues en modélisant le cas de référence par un bloc homogène puis par les tôles homogènes.

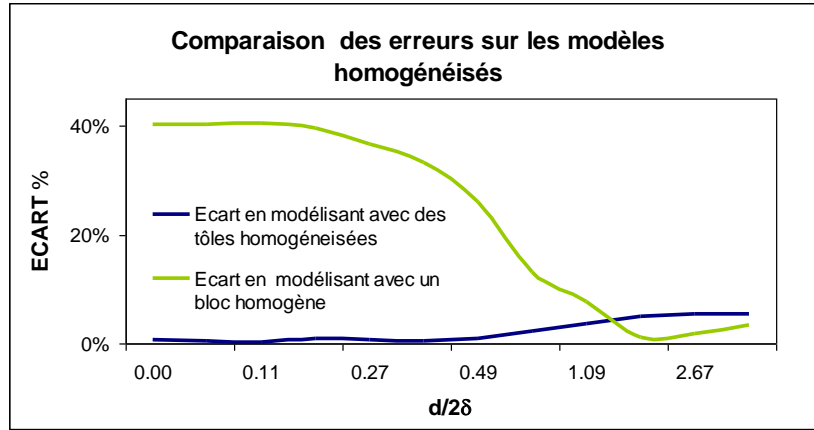


Figure 15 Validation du modèle de tôles homogénéisées

La figure 15 nous montre que le modèle de tôles homogénéisées reproduit le comportement du bloc de tôles réelles avec une meilleure précision, ceci avec un certain nombre d'avantages que nous verrons par la suite.

L'erreur de modélisation avec les tôles homogénéisées est au maximum de 5% en HF.

Rappelons que les pertes en 3D peuvent être scindées en deux ; les pertes en μ^* qui sont les pertes 2D et les pertes en σ^* .

Nous comparons par la suite terme à terme les pertes sur les deux modèles homogénéisés pour vérifier l'hypothèse sur l'origine de l'erreur obtenue sur la figure 12.

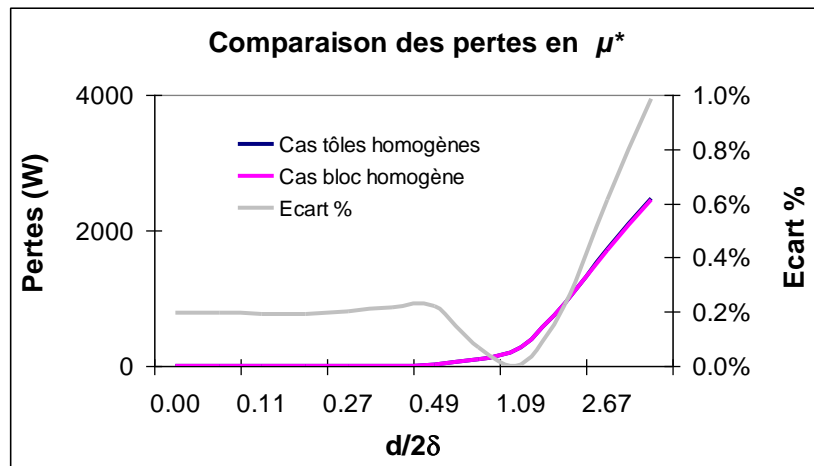


Figure 16 Comparaison terme à terme des pertes.

La figure 16, montre une bonne concordance des pertes 2D (en μ^*) entre les différents modèles homogénéisés. On retrouve bien l'intérêt du feuilletage ; il ne modifie que très faiblement le champ. Le bloc homogène est équivalent aux tôles homogénéisées du point de vue des pertes en μ^* .

Passons à la comparaison des pertes en σ^* .

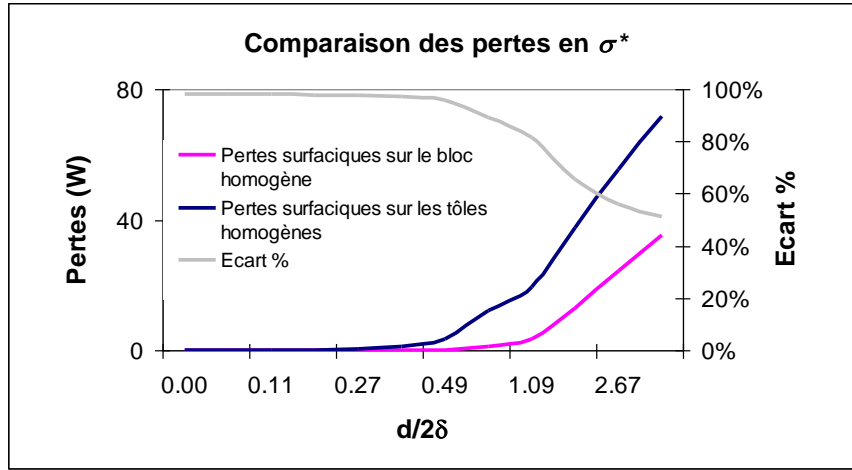


Figure 17 Comparaison terme à terme des pertes.

La figure 17, vient vérifier l'hypothèse faite sur l'origine de l'erreur de modélisation des circuits magnétiques avec entrefer. En effet l'effet du laminage du bloc homogène en tôles homogènes permet une meilleure estimation des pertes en σ^* . L'écart des pertes en σ^* entre le bloc homogène et les tôles homogènes est supérieur à 90% déjà en BF.

4.4. Conclusions sur le modèle de tôles homogénéisées

Le modèle de tôles homogénéisées est une alternative au modèle de bloc homogène. Il est adapté à tous les dispositifs sans considération de taille d'entrefer. Il est certes un compromis entre l'homogénéisation classique ne comportant qu'un élément par épaisseur de peau (validé par des simulations sur l'empilement classique de tôles) et le bloc réel de tôles comportant autant d'éléments dans l'épaisseur d'une tôle que le requiert la fréquence d'étude. Aussi, il nécessite tout de même de décrire chacune des tôles et augure les mêmes problèmes de raccordement de maillage (finesse des éléments, surtout dans les couches isolantes).

Cependant il offre des avantages non négligeables, malgré la description de la géométrie et les problèmes de maillages qui notons-le peuvent être levés par une automatisation de la construction de l'empilement total simplement à partir d'une surface de base à extruder. De ces avantages nous citerons l'allègement significatif du maillage requis sur le bloc de tôles réelles. En effet, il n'est nécessaire de définir sur l'épaisseur de chaque tôle homogénéisée qu'un seul élément.

Par exemple, si l'on considère le cas test de validation : circuit magnétique avec entrefer 1/12 ; le dispositif équivalent composé de tôles homogénéisées requiert 300 fois moins d'éléments que le cas de référence et ce, sur toute notre plage d'étude (BF et HF).

Ceci traduit le fait que les phénomènes dynamiques sont pris en compte par des propriétés équivalentes. Du fait de l'isotropie du bloc homogène et avec l'ajout de la

contrainte $\mathbf{T}=\mathbf{T}_z$ les inconnues vectorielles deviennent scalaires. Notre formulation $\mathbf{T}-\phi$ est donc purement scalaire d'où un nombre réduit d'inconnues et un système plus facile à résoudre.

5. Perspectives

Plusieurs pistes d'amélioration du bloc homogène uniforme se profilent après analyse de la figure 18 qui montre la distribution des pertes tôle à tôle à différentes fréquences sur le dispositif de la figure 9; la tôle_1 étant celle du dessus. Deux principales idées peuvent être retenues.

- *L'homogénéisation partielle*

Elle consiste à garder une structure de bloc homogène dans le cœur de l'empilement et à garder les tôles périphériques à l'identique. Cette solution nécessite quand même une première résolution pour évaluer l'amplitude des champs dans les tôles. Celle-ci permet ensuite de voir la proportion de tôles (de l'empilement réel) à remplacer par un bloc homogène.

On peut noter aussi que cette solution est applicable au cas par cas seulement en BF puisqu'en HF l'essentiel des pertes est localisé dans la première tôle. Donc en HF une structure composée d'une tôle et d'un cœur de bloc homogène permettra de modéliser les pertes.

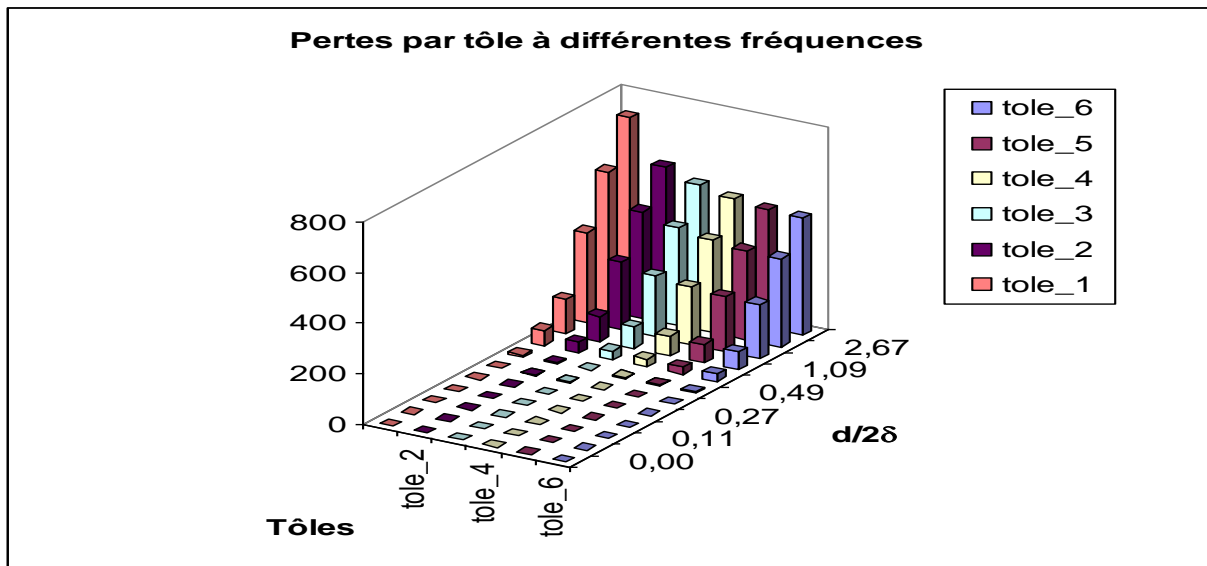


Figure 18 Aperçu des pertes tôle par tôle.

- *Utilisation de coques*

L'utilisation des coques est envisagée dans le but de limiter le nombre d'inconnues et permettrait si les modèles sont validés de passer d'une formulation $\mathbf{T}\text{-}\phi$ scalaire à une seule inconnue scalaire ϕ . Des cas d'utilisation des coques sont évoqués dans la suite.

○ Homogénéisation partielle



Figure 19 Remplacement de la première tôle par une coque.

Il s'inscrit dans la même lancée que l'homogénéisation partielle. En faisant la répartition des pertes par tôle, nous observons que les tôles extrêmes (celle du haut de l'empilement) sont soumises à plus de courants de Foucault que les tôles intérieures. Le modèle 3D de tôles homogénéisées est moins avantageux en termes de maillage que le bloc homogénéisé uniforme. Nous observons une décroissance moyenne des pertes en σ^* de 20% d'une tôle à la tôle en dessous. D'où l'idée de conserver un cœur de bloc homogène uniforme et de remplacer les tôles extrêmes par des coques, les coques offrant une bonne précision moyennant une seule inconnue scalaire

Cette méthode propose de garder la même structure de bloc homogène dans le cœur de l'empilement et le remplacement des tôles extrêmes par des coques.

En résolvant sur le dispositif de la figure 19. On observe une erreur de 7% en comparant les pertes uniquement sur la tôle et sur la coque. De plus cet écart correspond bien à l'erreur de modélisation reportée en [Guérin, 1994] concernant le modèle de coques généralisées implanté sous Flux.

Cette erreur de 7% pourrait être levée par l'utilisation de «coques volumiques» [Thomas & Le Menach, 2012]. Aussi, faire une homogénéisation partielle avec une coque (remplacer seulement la proportion du bloc homogène correspondant à la première tôle par une coque) ne résout pas le problème. On constate un maximum

d'erreur à 59% sur tout le dispositif en ayant comme structure une coque et un cœur de bloc homogène.

Une étude plus approfondie permettra de déterminer la proportion de tôles à remplacer par des coques.

○ Empilement de coques

En cherchant à s'affranchir de cette pré-étude, une solution globale de modélisation par les coques est étudiée. Elle propose de modéliser le cas de référence par une pile de coques comme le montre la figure 20.

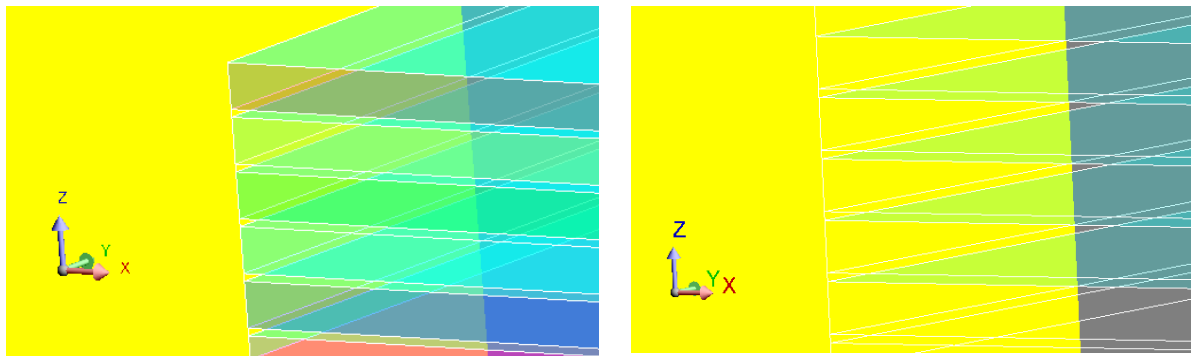


Figure 20 Remplacement du bloc de tôles (gauche) par un bloc de coques (droite).

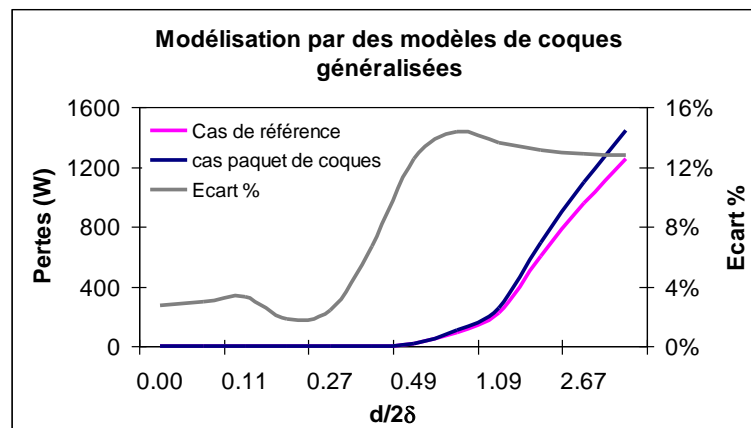


Figure 21 Comparaison du bloc de tôles au bloc de coques.

Avec un modèle de coques, on constate que ces dernières ont le même comportement que le bloc homogène uniforme en BF et donnent une meilleure approximation des pertes HF avec une erreur quasi constante à 13% à un rapport $d/2\delta = 3,44$.

Ceci ouvre le débat d'une éventuelle modélisation des paquets de tôles par des modèles de coques généralisées, offrant après amélioration une bonne précision de calcul moyennant une seule inconnue.

- **Modèles harmoniques non linéaires**

Les méthodes harmoniques non linéaires, présentent un intérêt certain dans la modélisation des pertes par courants de Foucault 3D. En effet, les temps de calcul sont beaucoup plus abordables du moment que l'on suppose les grandeurs sinusoïdales donc un régime établi. Des modèles sont implémentés sous Flux et présentés dans [Guérin, 1994]. Le plus couramment utilisé concerne les méthodes dites à énergie équivalente

- *Méthodes à énergie équivalente*

Du fait du non-linéarité pour un champ magnétique \mathbf{H} sinusoïdal, L'induction n'est plus sinusoïdale comme le montre la figure 22.

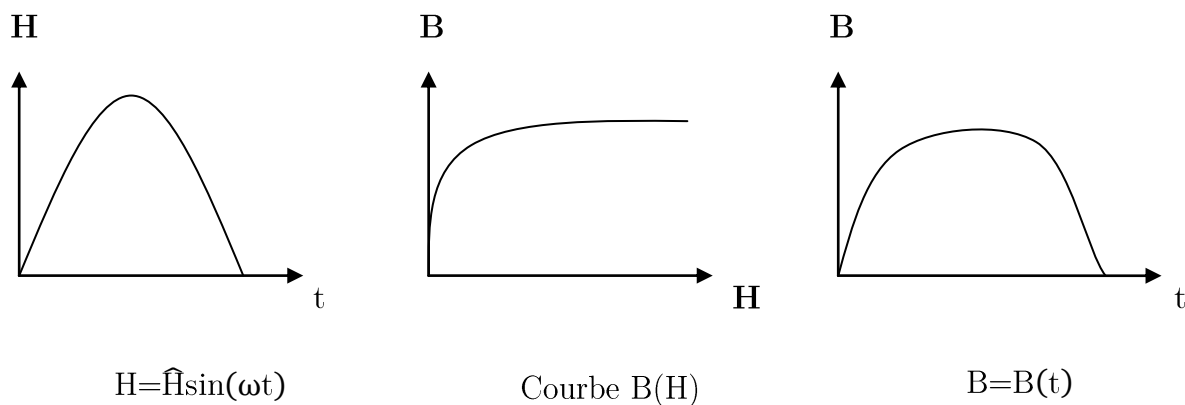


Figure 22 Effets de la non-linéarité sur l'induction, pour un champ \mathbf{H} sinusoïdal.

Il est nécessaire dans ces cas de calculer une induction sinusoïdale équivalente en supposant toutes les autres entités, à variation sinusoïdale dans le temps. Ce calcul se fera par l'évaluation d'une courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ équivalente qui suppose une égalité de la densité moyenne d'énergie sur une période entre la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ réelle et la courbe équivalente; ceci pour un point quelconque de l'espace.

Cependant des cas extrêmes sont à considérer : les cas où soit \mathbf{B} soit \mathbf{H} est sinusoïdal même si dans la réalité aucun des deux ne l'est. Une méthode de résolution non linéaire type Newton-Raphson sera utilisée pour résoudre les coefficients complexes des systèmes non linéaires. Le détail des méthodes est donné dans [Guérin, 1994].

Le but de ce travail étant le développement modèles de pertes en transitoire avec comme principale application les moteurs électriques. les modèles de matériaux non linéaires n'ont pas été couplés aux modèles de pertes en harmonique bien que s'y prêtant fortement. Des modèles de matériaux anisotropes pourraient être couplés aux modèles de pertes en harmonique.

Conclusions

Dans cette partie consacré aux modèles harmoniques. On retient que le modèle de bloc homogène, solution idéale en termes de maillage et de construction géométrique trouve sa limite dans la modélisation des dispositifs à champs non-parallèle au plan de laminage. Aussi les écarts constatés sont fonction principalement de la reluctance du circuit complet.

Ainsi, pour un bloc amagnétique en cuivre (sans aucun intérêt pour le magnétisme reconnaissons-le) pour une quelconque valeur de conductivité les résultats sont valides quelle que soit la largeur de l'entrefer ; L'hypothèse 2D reste vérifiée dans ce cas (pas de discontinuité dans la direction des lignes de champ!)

Les modèles de tôles homogénéisées offrent une alternative et amoindrissent l'intérêt de l'homogénéisation. Ils nécessitent une description géométrique de toutes les tôles et un maillage de celles-ci à raison d'un élément par tôle à toute fréquence. Ils présentent malgré ces contraintes l'avantage de pouvoir modéliser les dispositifs à large entrefer.

Les coques offrent quant à elles de bonnes performances de calcul, et peuvent moyennant des développements supplémentaires remplacer les tôles dans la modélisation des pertes par courant de Foucault dans les blocs magnétiques feuilletés.

Résumé

Il est donné ici un résumé des modèles disponibles pour la modélisation harmonique 3D, ainsi que de leurs limites. Ensuite, des perspectives de développement sont exposées.

- Un modèle 3D de bloc homogénéisé, en $\langle \mu_{eq} \rangle$ et σ^* est implémenté et validé pour des dispositifs à faibles entrefers
- Un modèle 3D de tôles homogénéisées en μ^* et σ^* est proposé et permet de simuler tout dispositif fréquentiel quelle que soit la largeur d'entrefer.

Ces modèles offrent une faible complexité de mise en œuvre, et sont facilement exploitables.

Références

1. [Bottauscio, 2002] O. Bottauscio & M. Chiampi, "Analysis of laminated cores through a directly coupled 2D-1D electromagnetics field formulation", IEEE Transactions on magnetics, vol. 38, n°5 pp. 2358-2360, September, 2002.
2. [Carpenter, 1977] C. J. carpenter, "Theory of flux penetration into laminated iron and associated losses", PROC. IEE, vol. 124, n°7, July 1977.
3. [Golovanov, 1993] C. Golovanov, "Implantation de formulations magnétodynamiques tridimensionnelles", Stage LEG, ENSIEG, 1993.
4. [Guérin, 1994] C. Guérin, "Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves des transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique". Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, 1994.
5. [Gyselinck & Dular, 2004] J. Gyselinck & P. Dular, "A time-domain homogenization for laminated iron cores in 3D finite element models". IEEE Transactions on magnetics, vol. 40, n°2, march 2004.
6. [Gyselinck, Sabariego & Dular, 2005] J. Gyselinck, R. Sabariego & P. Dular, "A nonlinear time-domain homogenization technique for laminated iron cores in three-dimensional finite element models", IEEE Transactions on Magnetism, vol. 42, n°4 pp. 763-766, april 2006.
39. [Meunier, 2008] G. Meunier, O. Maloberti, A. Kedous-Lebouc, "Pertes dynamiques dans les matériaux magnétiques", European Journal of Electrical Engineering RIGE, VOL 11/2—3, pp.303—332, 2008.
7. [De Gersem, 2012] H. De Gersem, S. Vanaverbeke, G. Samaey, "3D-2D coupled model for eddy currents in laminated iron cores", IEEE Transactions on magnetics, vol. 42, n°2, pp. 815-818, february, 2012.
8. [Thomas & Le Menach, 2012] P. Thomas & Y. Le Menach, "A Three-Dimensional Electromagnetics Shell Finite Element for Coupled Vector-Scalar Potential Formulations", IEEE Transactions on magnetics, vol. 48, n° 2, february, 2012

Figures :

Figure 1 Problème de modélisation 3D

Figure 2 synoptique du programme de calcul des pertes

Figure 3 Cas de référence de validation (Rappel du cas-test décrit à la figure II.5)

Figure 4 Maillage du cas de référence

Figure 5 Iso valeurs de B sur le cas homogénéisé

Figure 6 Modélisation de champs $h_{//}$ et h_{\perp}

Figure 7 Influence des champs non planaires

Figure 8 Modèle 3D de pertes par courants de Foucault

Figure 9 cas-test de validation 3D

Figure 10 Pertes sur un circuit magnétique fermé

Figure 11 Variation de l'Erreur de modélisation en fonction de la largeur de l'entrefer

Figure 12 Validation du modèle 3D pour une ouverture de 1/12

Figure 13 tôles réelles (gauche), modèle de bloc homogène (droite)

Figure 14 tôles réelles (gauche), modèle de tôles homogénéisées (droite)

Figure 15 Validation du modèle de tôles homogénéisées

Figure 16 Comparaison terme à terme des pertes.

Figure 17 Comparaison terme à terme des pertes.

Figure 18 Aperçu des pertes tôle par tôle

Figure 19 Remplacement de la première tôle par une coque

Figure 20 Remplacement du bloc de tôles (gauche) par un bloc de coques (droite).

Figure 21 Comparaison du bloc de tôles au bloc de coques.

Figure 22 Effets de la non linéarité sur l'induction, pour un champ H sinusoïdal.

Tableaux :

Tableau.1 – caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène

Tableau.2 – Maillage et performances computationnelles sur la partie linéaire

Tableau.3 – comparaison des pertes à 50Hz

Tableau.4 – Maillage et performances de calcul pour la validation 3D harmonique.

Tableau.5 – Caractéristiques physiques des tôles et du bloc homogène

Conclusion et perspectives

Dans cette étude, la problématique du calcul des pertes par courants de Foucault dans les circuits magnétiques feuilletés a été étudiée. En effet, les matériaux magnétiques représentent un composant de base de différents dispositifs électromagnétiques (transformateurs, machines électriques,...).

Le but de cette étude était donc de pouvoir modéliser, par des méthodes numériques de type éléments finis, les pertes qui apparaissent dans ces matériaux magnétiques. Les modèles développés sont intégrés dans le logiciel Flux en 2D et 3D. Ces modèles sont basés sur des techniques d'homogénéisation qui permettent de tenir compte de l'empilage de tôles sans avoir à décrire la géométrie et le maillage de chacune des tôles.

Dans cette optique, nous avons présenté, dans un premier temps, l'ensemble des formulations électromagnétiques utilisées et qui seront modifiées pour la prise en compte des pertes. Ensuite, nous avons détaillé les différents phénomènes physiques qui se produisent dans les tôles des circuits magnétiques et qui sont sources de pertes.

Quelques modèles tentant d'évaluer ces pertes ont été présentés. Ces modèles évaluent les pertes après résolution du problème électromagnétique (modèles dits « a posteriori »). D'où l'intérêt de ce travail qui consiste à introduire des modèles de pertes a priori (c.à.d. prenant en compte les pertes déjà en phase de résolution). Ce qui permettra d'obtenir des résultats précis sur les grandeurs locales (induction magnétique, densités de courant) et sur les grandeurs globales telles que les pertes. Ces méthodes a priori outre le gain en précision permettent un meilleur couplage avec des applications multi physiques en rendant compte en temps réel de l'évolution des champs et de leur interactions avec d'autres propriétés physiques du matériau.

Nous avons commencé par développer des modèles de pertes en 2D. En effet, plusieurs applications présentant une invariance suivant une dimension ou une symétrie axiale peuvent être traitées en 2D (moteurs électriques,...) avec certaines hypothèses simplificatrices.

En régime transitoire, le modèle développé est basé sur la modification de la loi de comportement $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ du matériau qui va comporter une dépendance avec l'induction \mathbf{B} et avec la dérivée de l'induction par rapport au temps $d\mathbf{B}/dt$. Il a été complété par la prise en compte du coefficient de foisonnement. Il a ensuite été validé dans le cas des matériaux magnétiques linéaires et non linéaires en basse fréquence. En effet, le

domaine de validité de ce modèle est limité par l'hypothèse d'absence d'effet de peau. Ce qui amène à considérer une épaisseur de peau au moins égale à la demi-épaisseur de tôle. Il est à noter que nous n'avons pas développé des modèles en haute fréquence. Dans la littérature, des modèles ont été caractérisés qui proposent des développements d'ordre supérieur de l'induction requérant plusieurs inconnues aux nœuds du maillage [Gyselinck&Dular, 2004].

En régime harmonique, nous avons développé deux modèles (analytique et numérique) qui sont confrontés et qui présentent une bonne concordance en haute et basse fréquence. Ces modèles de façon analogue au cas transitoire modifient la loi $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. Ils ont été validés en prenant en compte du coefficient de foisonnement pour les deux types de matériaux linéaire et non linéaire.

Les modèles 3D permettent de représenter la plupart des dispositifs électromagnétiques dans leurs conditions réelles d'utilisation sans émettre d'hypothèses simplificatrices. Dans ce cas, les modèles doivent prendre en compte en plus des courants de Foucault qui se développent dans l'épaisseur des tôles dus aux variations temporelles de l'induction, lorsqu'elle est principalement tangentielle au plan des tôles, ceux dus aux variations temporelles de l'induction, lorsqu'elle est principalement normale au plan des tôles.

En régime transitoire, en 3D comme en 2D basse fréquence, les modèles développés font l'hypothèse d'absence d'effet de peau.

En régime harmonique, en s'inspirant des modèles développés en 2D, nous avons développé un modèle qu'on a nommé « **bloc homogène** ». Ce modèle ne tient compte que des pertes pour un champ magnétique uniquement dans le plan des tôles (pertes 2D). Par ailleurs, ce modèle 3D ne permet pas de calculer les pertes avec une précision acceptable dans le cas où le champ est perpendiculaire au plan de la tôle.

C'est donc, inspiré des travaux développés dans [De Gersem, 2012], nous avons proposé un nouveau modèle appelé « **Modèle de tôles homogénéisées** ». Il se différencie du modèle précédent par le feuilletage du bloc homogène en tôles homogènes.

Le modèle de tôles homogénéisées est une alternative intéressante au modèle de bloc homogène. Il est adapté à tous les dispositifs quelle que soit la direction du champ magnétique. Cependant, il nécessite de décrire chacune des tôles et engendre par voie de conséquence quelques problèmes de maillage.

Tout de même, il offre des avantages non négligeables. Nous citons essentiellement l'allègement significatif du maillage requis sur le bloc de tôles réelles. En effet un seul élément est nécessaire dans l'épaisseur de chaque tôle homogénéisée quelle que soit l'épaisseur de peau.

Le travail dans le cadre de ce mémoire a permis d'établir une première base de modèles pour le calcul des pertes par courant de Foucault. Les perspectives de ce travail sont nombreuses et variées:

- Malgré ses inconvénients, le modèle « bloc homogène » reste intéressant puisque la géométrie des tôles est remplacée par un seul bloc. Des pistes d'amélioration de ce modèle peuvent être envisagées. L'une d'elles consiste à l'hybrider avec le « modèle de tôles homogénéisées ». On garde une structure de bloc homogène à l'intérieur de l'empilement et on considère le modèle de tôles homogénéisées pour les tôles situées aux extrémités.
- L'intérêt du « modèle de tôles homogénéisées » pourrait être augmenté par l'automatisation de la construction géométrique et le maillage sur ces tôles homogénéisées, en soulignant qu'il n'est nécessaire de définir qu'un seul élément sur l'épaisseur de la tôle pour un spectre BF, HF.
- Compléter la panoplie des modèles développées pour traiter les problèmes en 3D transitoire en haute fréquence en linéaire et non linéaire.
- Dans le but de limiter le nombre d'inconnues des problèmes étudiés, on peut envisager l'utilisation des éléments coques. En effet, les tôles sont remplacées par des éléments coques. Comme montré plus haut, celles-ci peuvent être utilisées comme alternative à la modélisation des pertes dans les tôles. Le comportement global, du paquet de coques est très similaire à celui du bloc homogène dans le cas d'un circuit magnétique avec entrefer. Cependant, la précision des modèles de coques pourrait être augmentée par l'utilisation des modèles édités en [Thomas & Le Menach, 2012]. En effet la modélisation d'une tôle par un coque présente une erreur de 7% sur le calcul des pertes. Aussi, les modèles de coques peuvent aussi servir aussi dans le cas de l'hybridation, décrite plus haut, avec moins d'inconnues que la solution en tôles homogénéisées proposée.